Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 17.06.1957
Stichworte: Hermitesche und pseudohermitesche Operatoren
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-1652r
Meyenn-Nummer: 2646

Göttingen 17.6.57.

Beantwortet: 21. VI.

Lieber Pauli!

Hab vielen Dank für Deine ausführlichen Briefe, die sicher zu manchen Verbesserungen der Arbeit führen werden.

Ich möchte mit der formalen Frage anfangen, wie man das Wort „hermitisch" definieren soll. Ich gebe Dir gern zu, dass man die Eigenschaft (Gl. 87): ${}_kA_l = {}_lA_k^*$ wohl zweckmässig „pseudohermitisch" nennt, wenn man schon den Begriff „pseudounitär" eingeführt hat. Es liegt mir aber daran, zu betonen, dass dieser Begriff „pseudohermitisch" doch fast alle wichtigen Eigenschaften mit dem Begriff „hermitisch" gemeinsam hat. Im Gegensatz zu Deinem Brief Nr. 3 folgt nämlich aus der Definition ${}_kA_l = {}_lA_k^*$, dass, wenn H_1 und H_2 diese Eigenschaft haben, auch $H_1H_2 + H_2H_1$ und $i(H_1H_2 - H_2H_1)$ die gleiche Eigenschaft haben. {Beweis: Es sei ${}_kA_l = {}_lA_k^*$ u. ${}_kB_l = {}_lB_k^*$. Dann ist $[{}_k(AB)_l]^* = [{}_kA_m g^{mn} {}_nB_l]^* = {}_mA_k g^{nm} {}_lB_n = {}_l(BA)_k$. Also auch $[{}_k(BA)_l]^* = {}_l(AB)_k$ und daraus

$$[{}_k(AB + BA)_l]^* = {}_l(AB + BA)_k \qquad \text{q. e. d.}\}$$

Völlig einverstanden bin ich mit Deinen „Spielregeln des Calculs" im Appendix zum 4. Brief. Genau diese Spielregeln hatte ich in Kap. III der Arbeit gemeint u. – vielleicht nicht klar genug – beschrieben (z.B. S. 27 oben, S. 28, Gl. (86) u.s.w.).

Als hermitisch konjugierten Operator A^* (oder „pseudoherm. ...") zu A definiert man natürlich nach Gl (87)

$$_k(A^*)_l = ({}_lA_k)^*.$$

Im speziellen Fall des pseudo-hermitischen Operators ist $A^* = A$. Der Einheitsoperator ist, wie in der Relativitätstheorie, natürlich definiert durch die Matrix δ_i^k; also hat man für ihn die drei gleichberechtigten Darstellungen $1 = \delta_i^k$ oder g_{ik} oder g^{ik}; d.h. ausführlicher geschrieben: ${}_i1^k = \delta_i^k$; ${}_i1_k = g_{ik}$; ${}^i1^k = g^{ik}$.

Die Gleichung $1 \cdot 1 = 1$ bedeutet also ${}_i1_l\,{}^l1^k = g_{il}\,g^{lk} = \delta_i^k$. Genau in diesem Sinne ist die Gleichung $S^*S = 1$ gemeint und, wie mir scheint, völlig zwangsläufig. z. B.

$${}_i(S^*)^l{}_l S^k = \delta_i^k \quad \text{oder} \quad {}^i(S^*)^l{}_l S^k = g^{ik} \quad \text{oder}$$

$${}_i(S^*)^l{}_l S_k = g_{ik} \quad \text{u.s.w.}$$

Ich kann nicht verstehen, was Du gegen die Bezeichnung $S^*S = 1$ einwenden willst.

Auch finde ich, nachdem man Gl (86) abgeleitet hat:

$$\langle \Phi_k | AB | \Phi_l \rangle = \langle \Phi_k | A | \Phi_m \rangle \langle \Phi^m | B | \Phi_l \rangle,$$

dass es sehr berechtigt ist, zu sagen, die Bezeichnung „Summation über alle Zwischenzustände" sei irreführend. Denn Φ_m und Φ^m bezeichnen ja nicht den gleichen Zustand, sondern zwei verschiedene, in dem betreffenden Basissystem reziproke Zustandsvektoren.

Natürlich hast Du auch recht damit, dass man die Multiplikation von Operatoren auch ganz ohne Metrik einführen könnte. Dann wären etwa immer nur die Komponenten ${}^{i}A_{k}$ $\cancel{{}^{i}A^{k}}$ definiert, nicht aber ${}_{i}A_{k}$ oder ${}^{i}A^{k}$. In diesem Sinne hat man dann eine „Summation über alle Zwischenzustände". Man kann aber dann nicht mehr das Matrixelement durch Multiplikation mit den Basisvektoren allein herleiten, — dann ~~sondern~~ bräuchte man eben immer wieder das reziproke System —, ~~oder~~ sondern (macht es über die Beziehung

$$\varphi_i\rangle\, {}^{i}A_k = A|\varphi_k\rangle .$$

Natürlich bin ich auch mit Deiner Bemerkung einverstanden, dass die Eigenwerte eines Operators durch die Forderung ${}_{i}H^{k} = \delta_i^k \cdot E_k$ definiert sind. Aus der „Pseudohermitizität" folgt nur ${}_{l}H^{l} = {}^{l}H_{l}^{*}$, also kann E_l auch komplex sein.

Alles in allem zu diesem formalen Punkt: Ich finde das, was Du schreibst (mit Ausnahme Deines Einwandes wegen $H_1H_2 + H_2H_1$) richtig, aber das, was ich geschrieben habe, auch richtig, sodass ich noch nicht recht verstehe, was Du mit Deinen energischen Formulierungen beabsichtigst. Der ganze Sachverhalt ist ja auch keineswegs besonders schwierig, er steht doch eigentlich in jedem Lehrbuch z.B. der Relativitätstheorie.

Allerdings kann man Rechenfehler machen, und ich habe inzwischen einen entdeckt, der übrigens, wie mir scheint, in verschleierter Form auch bei Dir u. Källén stehengeblieben ist. Wenn man die indefinite Metrik eingeführt hat, so gilt natürlich nicht mehr $\{\psi_V^*, \psi_V\} = 1$ sondern $\{\psi_V^* \psi_V\} = -1$ (für die unrenormierten ψ_V). Auf der rechten Seite von Gl. (46) u. (47) meiner Arbeit muss also das Vorzeichen geändert werden. Man sieht das am einfachsten aus der Forderung $\overbrace{\langle 0 | \psi_V, \psi_V^* | 0 \rangle}^{= \text{Norm von } \psi_V^* |0\rangle =} = -1$. Auch das stimmt aber mit der Definition von (pseudo)hermitisch:

$$1 = {}^{1_V}(\psi_V^*)_0 = g^{1_V 1_V}\, {}_{1_V}(\psi_V^*)_0 = g^{1_V 1_V} \left({}_0\psi_{V\, 1_V}\right)^* = g^{1_V 1_V} g_{00} \cdot \left({}^0\psi_{V\, 1_V}\right)^*$$

$$= -1 \cdot \left({}^0\psi_{V\, 1_V}\right)^*; \quad \text{d.h.} \quad {}^0\psi_{V\, 1_V} = -1.$$

Nun zu den allgemeinen Fragen Deines Briefes. Dein Programm für Haag: „Erweiterung der Wightman-Arbeit durch Deine 3 Forderungen" finde ich sehr vernünftig. Ich würde allerdings unbedenklich noch als 4-te Forderung dazufügen: Die Feldoperatoren müssen für raumartige Abstände vertauschbar sein. Denn wir wissen ja aus der Geisterdipol-mathematik, dass die vier Forderungen wirklich alle gleichzeitig erfüllt werden können; also soll man den Rahmen nicht unnötig weit ~~[illegible]~~ spannen.

Ob dabei noch etwas Allgemeineres herauskommen wird, als der Geisterdipol, wird sich zeigen. Ich bin im Ganzen eher skeptisch gegen solche Erweiterungen. Denn schliesslich braucht man die Quantisierung ja nur für eine einzige Gleichung zu wissen, nämlich für die Wellengleichung der Materie. Und da glaube ich eben sehr starke Gründe für die Vermutung zu haben, dass die Quantisierung den Geisterdipol benützt. Trotzdem finde ich solche allgemeinen Untersuchungen à la Wightman ganz nützlich. — Deine und Josts Überlegungen zur analytischen Fortsetzung nach komplexen Raum-Zeitpunkten finde ich sehr interessant, aber ich habe noch keine Meinung dazu. Aus Euren Rechnungen schliesse ich, dass für das Spinormodell jedenfalls die CPT-Invarianz gilt. — Wenn die Ergebnisse von Frauenfelder stimmen und sich verallgemeinern lassen, so wird man daraus eine Menge lernen können. Ich möchte aber einstweilen beim Nachdenken über die Paritätsfragen von der γ_5-Invarianz meiner Spinorgleichung ausgehen und zusehen, ob man den Isotopenspin nicht durch ein unbestimmtes Vorzeichen des κ-Gliedes in der V.R. einführen kann. Einstweilen ist hier alles noch im Fluss. —

Du fragst noch, ob man in H.R. II überhaupt eine Metrik brauche. Ich glaube doch, dass diese Metrik eine wesentliche Pointe der Feldtheorie ist. Denn man wird eben für die Konvergenz der Theorie brauchen, dass die Produkte von Feldoperatoren auf dem Lichtkegel (u. speziell am gleichen Punkt) existieren. Dazu aber ist die Metrik im H. R. II mit ihren Minuszeichen wesentlich (d. h. ~~man~~ man braucht die alte Regularisierungsvorschrift!).

Noch zur S. 40 (positive Norm der diskreten stationären Zustände): Man wird über die allgemeinen Betrachtungen, bei denen man doch irgendwelche Aussagen über die Analytizität der S-Matrix braucht, kaum hinauskommen, solange man nicht ein konkretes Beispiel durchgerechnet hat. Das ist aber nochmal eine grosse Arbeit. -- Für eventuell vorhandene komplexe Eigenwerte gilt übrigens dasselbe, was in Abs. 2 auf S. 26 („im Fall 756") gesagt ist. Sie gehören ausnahmslos zum H. R. II.

Ich werde, nach Besprechung mit Haag, darangehen, den Text im Sinne Deiner Briefe noch zu verbessern.

Viele herzliche Grüsse!

Dein W. Heisenberg

P.S. Soll man die Arbeit ins Nuovo Cimento schicken oder in Nuclear physics? – Scherrer fragte mich eben, ob ich am Samstag 29.6. bei Euch in Zürich vortragen könnte; ich werde wahrscheinlich zusagen, da ich am 28. sowieso in Genf sein muss.