Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 11.04.1957
Stichworte: positive Norm stationärer Zustände im Hilbertraum I
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-164r
Meyenn-Nummer: 2599

Göttingen 11.4.57.

Lieber Pauli!

Dank für Deinen Brief aus Kopenhagen. Hattest Du eigentlich meinen nach Zürich noch bekommen?

Ich habe fest vor, nach Oberwolfach zu kommen, und es geht mir seit einigen Wochen auch soviel besser, dass ich bestimmt hoffe, die Reise machen zu können. In der Zeit, in der Du dort bist, wird ein halber Tag dem Lee-modell mit Dipolgeist, ein anderer der γ_5-Transformation, Parität u. dergl. gewidmet werden können. Daneben können wir privat mit Källén fachsimpeln.

Ich bin inzwischen wieder etwas weitergekommen und glaube auch die Positivität der Normen jetzt anständig beweisen zu können. Der ganze Sachverhalt scheint mir jetzt sehr durchsichtig; die Unitarität der S-matrix (im Hilbertraum I) u. die Positivität der Norm stationärer Zustände sind nur zwei verschiedene Seiten des gleichen Sachverhalts.

Den Gedankengang will ich hier kurz skizzieren: Der normale Beweis für die Unitarität der S-Matrix nach Møller geht bekanntlich etwa so:

Man charakterisiere den Zustand im Kontinuum durch die einfallenden Teilchen mit den Impulsen k_i. Die Wellenfunktion im Impulsraum kann dann geschrieben werden:

$$\langle k_i''|\psi|k_i'\rangle = \langle k_i''|1|k_i'\rangle + \delta_+(\Sigma\omega_i' - \Sigma\omega_i'')\,\langle k_i''|r|k_i'\rangle , \qquad (1)$$

wobei $\delta_\pm(k) = \pm\frac{1}{2\pi i k} + \frac{1}{2}\delta(k)$. (2)

Schreibt man $H = E_{kin} + V = \Sigma\omega_i + V$, (3) so wird wegen der Schrödingergleichung

$$r = 2\pi i\, V\psi \quad \text{u.} \quad r^+ = -\,2\pi i\, \psi^+ V , \quad \text{also}$$

$$\psi^+ r + r^+\psi = 0 . \qquad (4)$$

Ferner wird definiert: $\langle k_i''|R|k_i'\rangle = \delta(\Sigma\omega_i' - \Sigma\omega_i'')\langle k_i''|r|k_i'\rangle$

Multipliziert man (4) mit $\delta(\Sigma\omega_i' - \Sigma\omega_i'')$ und setzt ψ aus (1) ein, so folgt

$$R + R^+ + R^+R = 0 , \qquad (5)$$

d.h., wenn $S = 1 + R$:

$$S^+S = 1 . \qquad (6)$$

Man kann nun fragen, was sich an diesem Beweis ändert, wenn man zum Lee-Modell mit Geisterdipol übergeht. Im allgemeinen ist dann schon (1) nicht mehr richtig, da auch Pole zweiter Ordnung und δ'-Funktionen vorkommen. Wenn man aber die k' so wählt, dass sie einen Zustand im Hilbertraum I darstellen, so bleibt (1) richtig (Definition von H.R.I).

Bevor man weitergeht, kann man statt der Darstellung von ψ in den k_i'' noch eine andere Darstellung wählen; dabei werde zunächst immer an einen Sektor $\left\{ \begin{matrix} N + z\theta \\ V + (z-1)\theta \end{matrix} \right.$ gedacht. Man kann ~~dies~~ das ψ durch ein System von

Zuständen darstellen, die aus $(z-1)$ θ-Teilchen (Impulse $k_1'' \dots k_{z-1}''$) und einem Zustand der Energie ε des Systems $\left\{ \begin{matrix} N+\theta \\ V \end{matrix} \right.$ bestehen. Die beiden „kritischen" Zustände haben die gleiche Energie $\varepsilon_0 = \varepsilon_{Dip}$. Dann kann man die Matrixelemente von r also als $\langle k_1'' \dots k_{z-1}'' \; \varepsilon'' \,|\, r \,|\, k_i' \rangle$ schreiben. Nun ist folgender Punkt wichtig: Das Matrixelement genügt der Bedingung:

$$\langle k_1'' \dots k_{z-1}'' \; \varepsilon_{Dip} \,|\, r \,|\, k_i' \rangle = 0 \quad \text{an der Stelle:} \quad \sum_1^{z-1} \omega_i'' + \varepsilon_{Dip} = \sum_1^{z} \omega_i' \,. \qquad (7)$$

Denn wenn diese Bedingung nicht gelten würde, so hiesse das nämlich, dass die Komponente von ψ, die zum Zustand $k_1'' \dots k_{z-1}''$ u. V_{Dip} gehört, an der kritischen Stelle (wegen der δ_+-Funktion) einen einfachen Pol hätte. Dann aber folgt aus der Schrödingergleichung (wie man leicht nachrechnet, wegen $H\varphi_{Dip} = \varepsilon_{Dip}\varphi_{Dip} + \ell\varphi_0$!), dass der Anteil von ψ, der zu $k_1'' \dots k_{z-1}''$ u. V_0 gehört, einen Pol 2. Ordnung hat – im Widerspruch zur Voraussetzung für H. R. I. Die Bedingung (7) besagt einfach, dass die Matrizen R und S keine Übergänge zu $k_1'' \dots k_{z-1}'' \; V_{Dip}$ enthalten.

Nach dieser Vorbereitung geht der Beweis für die Beziehung S^+S genau wie vorher, nur muss man bei der Definition von S^+ aufpassen: Allgemein gilt

$$\cancel{S_{ik}} \quad A^+_{ik} = A^*_{ki} \,;$$

aber in der indefiniten Metrik bedeutet

$$(S^+S)_{il} = S^{+\;k}_{i} S_{kl} = S^+_{im}\, g^{mk} S_{kl} \,. \qquad (8)$$

Nun ist hier zwar, im Allgemeinen $g^{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$,

aber $g^{00} = g^{Dip\,Dip} = 0$; ~~$g^{0\,Dip}$~~ u. bei geeigneter Normierung $g^{0\,Dip} = g^{Dip\,0} = 1$. (9)

Da aber die Zwischenzustände m und k in (8) nur V_0 und nicht V_{Dip} enthalten können, verschwindet deren Beitrag und (8) geht über in

$$S^{+}_{ik}\, S_{kl} = \delta_{il}, \text{ d.h. } S^{*}_{ki} S_{kl} = \delta_{il}, \quad (10)$$

wobei alle Zwischenzustände mit V_0 ~~...~~ weggelassen werden können. Die S-Matrix ist also in allen Sektoren $\begin{cases} N + \nu\,\Theta \\ V + (\nu - 1)\Theta \end{cases}$ unitär.

Dies gilt z. B. im Sektor $N + 3\Theta$ unabhängig davon, ob noch diskrete stationäre Zustände des Sektors $N + 2\Theta$ in H.R. I existieren. Wenn solche existieren, dann bedeutet das nämlich nur, dass die r-Matrix in (1) noch andere Pole (im Komplexen) besitzt. Nehmen wir an, die Energie eines solchen Zustands sei $\varepsilon_{N+2\Theta}$, so müsste r einen Anteil enthalten, der sich wie $\frac{1}{\omega_1'' + \omega_2'' - \varepsilon_{N+2\Theta}}$, oder bei der Darstellung in k_1'', ε'' wie $\frac{1}{\omega_1'' + \varepsilon'' - \varepsilon_{N+2\Theta}}$ verhielte.

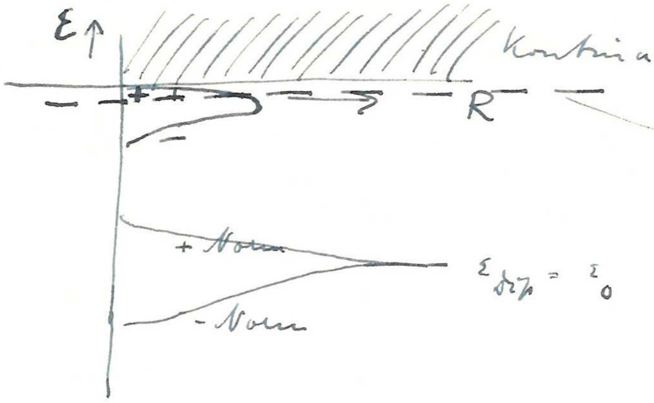
Diese Zustände müssen dann, wie ich schon das letzte Mal schrieb, zum H.R. I gehören, wie der Faktor δ_+ in (1) beweist; es dürfen ja keine δ'-Funktionen auftreten.

Das Auftreten dieser diskreten Zustände ändert aber nichts an der Unitarität der S-Matrix nach (10). Daher muss ihre Norm positiv sein (oder verschwinden), denn sonst könnte die S-Matrix nicht unitär sein.

Die E.F. des diskreten Zustands kann dabei durchaus Anteile vom Typ $\Phi_1'' \cdot V_{dip}$ enthalten. Diese Anteile schaden aber nichts für die Unitarität der S-Matrix, da sie an der Stelle $\sum \omega_i' = \sum \omega_i''$ regulär sind; ihr Beitrag zur S-Matrix ~~[illegible]~~ verschwindet daher. Dieser im ersten Augenblick etwas paradoxe Sachverhalt wird verständlich, wenn man an den Satz von Kramers erinnert, dass die diskreten stationären Zustände durch Pole der S-Matrix (also hier der S-Matrix im Sektor $N + 2\theta$) bestimmt sind und dass das Residuum am Pol die Norm des Zustands festlegt. Also auch das Vorzeichen der Norm ist durch das asymptotische Verhalten der E.F. festgelegt. —

Noch eine Bemerkung zu Deiner Frage nach diskreten Zuständen im Sektor $2N + \theta = N + V$. Wenn man die Energie (ausgenommen die kinetische Energie der N od. V-Teilchen) als Funktion des Abstandes aufträgt, so will ich einmal (auf Grund einer sehr schlampigen Rechnung) versuchsweise annehmen, dass sich das folgende

Termschema ergäbe (für die reellen Energiewerte!):



(R = Abstand N ⟷ V)

Die Energie eines eventuell vorhandenen diskreten Zustands muss, wenn er in H.R. I liegen soll, grösser sein als $E_{Dip} = E_0$. Ich habe den Verdacht, dass es einen (oder sogar mehrere??) solchen Zustand in der mit – – – bezeichneten Gegend geben könnte, wenn man die Masse von V als sehr schwer aber endlich annimmt. Denn würde der Bildpunkt des Systems auf der mit + (+ Norm) bezeichneten Kurve nach rechts gleiten, an der Stelle mit senkrechter Tangente würde sprunghaft der Übergang in eine Mischung aus V_+, V_- bzw. V_{Dip}, V_0 u. Kontinuum erfolgen und bei geeigneter Energie könnte asymptotisch V_{Dip} gerade wegfallen, wie es sein muss. Aber das ist natürlich alles geraten, und Källén mag das besser machen u. wirklich rechnen.

Also auf gutes Wiedersehen in Oberwolfach!

Dein W. Heisenberg