Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 11.02.1957
Stichworte: Allgemeine Definition des Funktionensystems, das den Hilbertraum I bildet
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-1605r
Meyenn-Nummer: 2508

z. Zt. Ascona 11. 2. 57.

Lieber Pauli!

Dein letzter Brief bringt unsere Diskussion um einen entscheidenden Schritt weiter. Um sicher zu sein, dass wir jetzt über die mathematischen Eigenschaften der Eigenzustände beim Geisterdipol einig sind, fasse ich nochmal zusammen:

1.) Funktionen mit Doppelpol lassen sich – selbst wenn sie durch axiomatische Festsetzungen zu „Lösungen" der Gleichung $H\psi = E\psi$ deklariert werden können – nicht zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte verwenden, da $\frac{a+br}{r}e^{ikr}$ keine auslaufende Kugelwelle ist.

richtig [illegible]

2.) Es gibt für jede „physikalische" Anfangsbedingung (d.h. Angabe der einfallenden „realen" Teilchen u. ihrer Impulse, z.B. der Teilchen N, Θ, Θ') eine (und nur eine) Lösung mit einfachem Pol (Lösung der Gl. $H\psi = E\psi$), wobei der Anteil an „einfallender" (virtueller!) V_0-Welle durch die Lösung festgelegt wird. Für diese Lösung ist die S-Matrix unitär.

Wenn wir hierüber einig sind, – und das scheint ja so zu sein –, müssen wir feststellen, ob Du jetzt mit meiner allgemeinen Definition des Funktionensystems einverstanden bist, das sich „quantenmechanisch normal" verhält und das den „Hilbertraum I" bildet.

Dieses System war ja durch folgende zwei Bedingungen definiert. 1.) Seine Eigenfunktionen genügen der Gl. $H\psi = E\psi$ und *nicht* etwa der allgemeineren Gl. $H\psi_A = E\psi_A + C\psi_B$. 2.) Die Funktionen zerfallen asymptotisch in Summen von Produkten, wobei jeder Faktor *auch* der Gl. $H\psi = E\psi$ genügen soll. [Diese Formulierung der Asymptotenbedingung ist noch etwas schlampig u. muss bei sorgfältiger Fassung etwas umständlich so lauten: Der Eigenzustand ist bekanntlich durch einen *Satz* von Funktionen $\psi(x_1 \dots x_n)$ mit verschiedenen Variabelnzahlen definiert. Dieser *Satz* befriedigt die Gl. $H\psi = E\psi$. Man betrachte zunächst die Funktion mit der *kleinsten* Anzahl von Variabeln; diese Anzahl sei n. Dann teile man die $x_1 \dots x_n$ in irgendwelche Gruppen ein, ~~die sich jeweils~~ und nehme an, dass die x_i innerhalb einer Gruppe räumlich benachbart bleiben sollen, ~~die Gruppen~~ jede Gruppe aber räumlich von den Gebieten der anderen Gruppen sehr weit entfernt sein soll. In den Funktionen mit höherer Variabelnzahl $\psi(x_1 \dots x_n, x_{n+1})$ ordne man die hinzugekommenen Variabeln ebenfalls irgendwie in diese Gruppen ein. Hält man dann die Variabeln aller Gruppen bis auf die *eine* Gruppe fest, so soll – als Funktion der Variabeln dieser letzteren Gruppe betrachtet – sich ein Funktionensatz ergeben, der sich als Summe von Lösungen der Gl. $H\psi = E\psi$ im Gebiet der letzten Gruppe darstellen lässt (die Variabelnzahl der Lösungen ist dabei im allgemeinen kleiner als die der Ausgangsfunktion).] Die oben etwas umständlich geschilderte Asymptotenbedingung ist in der gewöhnlichen Qu. mech. trivial; hier soll sie ausdrücklich gefordert werden.

Unter den Lösungen der Gl. $H\psi = E\psi$ kommt im Sektor $N + \theta$ auch der Nullvektor V_0 vor, und der muss im asymptotischen Verhalten höherer Eigenfunktionen als ein- u. auslaufende Welle stets mit zugelassen werden. Es ist natürlich Geschmacksache, ob man ihn mit zum Hilbertraum I zählen will oder nicht. Es ist vielleicht konsequenter, ihn nicht mitzuzählen, da er ja kein physikalisches „Teilchen" darstellt u. weder Impuls noch Energie besitzt.

Im Gegensatz zu deinen früheren Briefen wirst Du jetzt wohl zugeben, dass dieser so definierte Hilbert-Raum I eine Fülle von Streuzuständen (u. eventuell auch von diskreten stationären Zuständen höherer Sektoren) besitzt, die im Prinzip durchaus genügen sollten, das darzustellen, was man physikalisch beobachtet, wenn man den an diese Stelle natürlich naheliegenden Einwand der Nicht-Kausalität zunächst zurückstellt. Darüber soll aber erst später gesprochen werden, da wir es ja jetzt nur mit der mathematischen Analyse zu tun haben.

Im Augenblick kommt es mir nur auf folgenden Sachverhalt an: Der Hilbertraum I hat folgende Gruppeneigenschaft: 1.) Wenn irgendein nichtstationärer Zustand im Hilbertraum I sich zeitlich so verändert, dass das durch ihn dargestellte Gebilde in zwei oder mehrere Teilgebilde auseinandertritt, die räumlich weit voneinander entfernt sind, so gehört auch jedes dieser Teilgebilde zum Hilbertraum I. 2.) Wenn zwei Teilgebilde, die zum Hilbertraum I gehören, zu einem Gesamtsystem vereinigt werden sollen, so gibt es stets Zustände im Hilbertraum I, die dies leisten (nämlich die mit einfachem Pol). — 3.) Die Norm von diskreten stationären Zuständen im Hilbertraum I kann nie negativ sein [zwei Beweise für diesen Satz habe ich in früheren Briefen angegeben. Der „Trick" mit dem äusseren elektrischen Feld ist natürlich nicht besonders befriedigend. Er ist nur insofern bequem, als er den ~~[illegible]~~ zu beweisenden Satz auf einen anderen, längst bekannten Satz (zeitliche Konstanz der Norm) zurückführt. Man kann aber auch das funktionentheoretische Argument des früheren Briefes benützen und das Integral über k_n in der Norm um die Pole zusammenziehen.]

Aus den genannten Eigenschaften des Hilbertraums I scheint mir folgendes hervorzugehen: Wenn Gott die Welt aus Zuständen des Hilbertraums I geschaffen hat (und *nur* aus solchen), so werden wir auch bei allen Streuversuchen niemals aus dem Hilbertraum I herauskommen können, auch wenn wir uns noch so sehr anstrengen. Dieser Schluss scheint mir völlig zwingend, er beweist aber natürlich noch garnicht, dass wir das Geschehen auch als „kausal" bezeichnen würden. Es enthält im Gegenteil ein gewisses Element von prästabilierter Harmonie, das physikalisch zunächst unplausibel scheint. Ich glaube aber, dass die Abweichungen von der Kausalität nicht schlimmer werden, als eben das

Auftreten der Coulombkraft. (Dass die Coulombkraft ein Element von Nichtkausalität enthält, zeigt auch die indefinite Metrik in der Quanten-Methode). Aber ich will ja heute nicht über das physikalische Glaubensbekenntnis sprechen, u. mich daher wieder auf die mathematische Analyse beschränken:

Wir müssen uns also wohl zuerst darüber einigen, ob der Hilbertraum I die von mir angegebenen Eigenschaften besitzt; das ist ja ein rein mathematisches Problem. Solltest Du also hier gegen meine mathematische Analyse noch Bedenken haben, so bitte ich, sie mir zu schreiben.

Du fragst mich nach meiner Meinung zu Deinem „Appendix I". Ich bin mit Deiner Mathematik hier durchaus einverstanden, sehe aber noch nicht, inwiefern Deine Resultate mit meinen Behauptungen in Konflikt geraten sollen. Es scheint mir gewiss wichtig, ob der Dipol bei Störungen beisammen bleibt oder nicht. Aber vielleicht sollten wir die Diskussion darüber noch verschieben.

In der Woche nach dem 3. März werden wir <u>vielleicht</u> noch hier sein, aber es ist noch nicht sicher. Ich schreib Dir, wenn es sich entschieden hat. Einstweilen viele Grüsse! Dein W. Heisenberg