Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 31.01.1957
Stichworte: Versuch eines Beweises, dass für Heisenbergs Integralgleichung des Streuproblems eine Lösung mit einfachem Pol existiert
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-1603r
Meyenn-Nummer: 2486

Göttingen 31. 1. 57.

Beantwortet 4.II.

Lieber Pauli!

Über Deinen Brief vom 29.1. war ich sehr froh, denn wenn auch unsere physikalischen Glaubensbekenntnisse noch die entgegengesetzten sind, so sind sich unsere Ansichten über den mathematischen Sachverhalt doch sehr viel nähergekommen, und ich bitte Dich, hier nicht müde zu werden, bevor völlige Einigkeit über die Mathematik erzielt ist.

Ein Punkt der Uneinigkeit scheint noch die Frage nach der Existenz einer Lösung der Integralgleichung mit <u>einfachem</u> Pol. Ich kann diesen Beweis noch nicht in aller mathematischen Strenge führen, möchte ihn aber doch ein Stück weit entwickeln.

Es handelt sich um eine Integralgleichung des Typs

$$\Phi(k)\,\chi(\omega) = \int \overset{d\omega'}{\cancel{dk'}}\, \Phi(k')\, f(\omega,\omega') + g(\omega) \qquad (1)$$

wobei $\chi(\omega)$ sich bei $\omega \sim \omega_0$ wie $(\omega-\omega_0)^2$ verhält.
(Ich darf wohl $d\omega'$ statt dk' schreiben u. die Winkelintegrationen unterdrückt denken)
Ich setze

$$\Phi(k) = \varphi(k) + b\,\delta(\omega-\omega_0) \qquad (2)$$

und bestimme b so, dass die rechte Seite von (1) für $\omega = \omega_0$ verschwindet:

$$\int \varphi(k')\,\cancel{dk'}\, f(\omega_0,\omega')\,d\omega' + b\, f(\omega_0,\omega_0) + g(\omega_0) = 0. \qquad (3)$$

Das Integral ist jetzt als reiner Hauptwert, ohne δ-Anteil, gemeint. Dann lautet die Integralgl. für $\varphi(k)$:

$$\varphi(k)\,\chi(\omega) = \frac{\int d\omega'\,\varphi(k')\left[f(\omega,\omega')\,f(\omega_0,\omega_0) - f(\omega_0,\omega')\,f(\omega,\omega_0)\right] + g(\omega)\,f(\omega_0\omega_0) - g(\omega_0)\,f(\omega,\omega_0)}{f(\omega_0,\omega_0)} \qquad (4)$$

Diese Integralgleichung bewirkt von selbst, dass $\varphi(k)$ sich bei $\omega \to \omega_0$ wie $\frac{\text{const}}{\omega-\omega_0}$ verhält, da die rechte Seite bei $\omega = \omega_0$ verschwindet. Ich kann sie also z. B. durch eine Neumann'sche Reihe zu lösen suchen:

1.) Näherung:

$$\varphi_1(k) = \frac{g(\omega)\,f(\omega_0\omega_0) - g(\omega_0)\,f(\omega,\omega_0)}{f(\omega_0\omega_0)\cdot\chi(\omega)} \qquad (5)$$

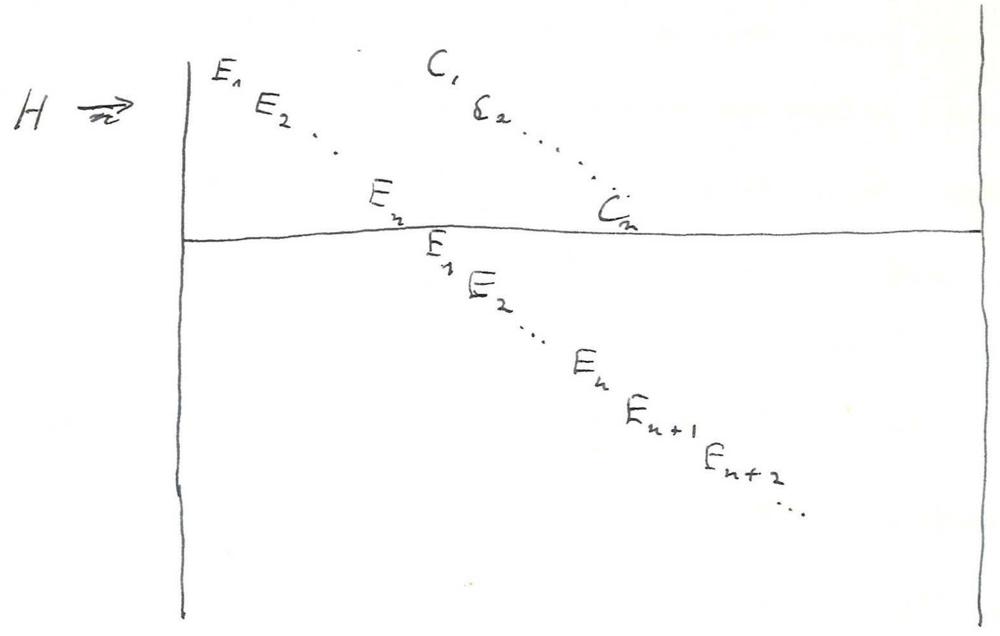
2.) Näherung

$$\varphi_2(k) = \frac{\int d\omega'\,\varphi_1(k')\left[f(\omega,\omega')\,f(\omega_0,\omega_0) - f(\omega_0\omega')\,f(\omega\omega_0)\right] + g(\omega)\,f(\omega_0\omega_0) - g(\omega_0)\,f(\omega,\omega_0)}{f(\omega_0\omega_0)\,\chi(\omega)} \qquad (6)$$

u. s. w.

Ich kann Dir zwar noch nicht streng beweisen, dass diese Reihe konvergiert, aber Du wirst mir zugeben, dass die Physiker normalerweise glauben würden, dass die Lösung durch (5), (6) u. s. w. hinreichend definiert sei.

Erlaube mir also für den Moment, die Existenz der Lösung vorauszusetzen; dann stellt sich das Problem im Ganzen doch so dar: Wie Du ausgeführt hast, lässt sich die Hamiltonfunktion im gegebenen Hilbert-Raum nicht vollständig diagonalisieren. Im ganzen Raum (einschliesslich aller höheren Sektoren) lässt sich die Lage also schematisch so ausdrücken:



Die Eigenfunktionen zu den Zuständen <u>unter</u> dem Strich genügen der Gleichung $H\psi = E\psi$. ~~Auf jenem Hilbertraum spannt man den~~ Ich darf wohl voraussetzen, dass diese Funktionen auch der Asymptotenbedingung ~~[illegible]~~ meines Briefs genügen, also die „normalen" Funktionen sind. Die Funktionen <u>über</u> dem Strich genügen <u>nicht</u> der Gl. $H\psi = E\psi$, sind aber notwendig, um den Hilbertraum vollständig aufzuspannen.

Wenn Du nun den Teil <u>unter</u> dem Strich „Hilbertraum I", und den <u>über</u> dem Strich „Hilbertraum II" nennst, hast Du das, was ich seit drei Jahren behaupte. Zur Darstellung der V.R. braucht man auch die Funktionen über dem Strich, d.h. den Hilbertraum II. Zur Darstellung der Physik aber, in der man sich nur für Eigenwerte der Gl. $H\psi = E\psi$ und für Wirkungsquerschnitte interessiert, genügt der Hilbertraum I. An dieser Stelle werden bei die sicher noch Hemmungen auftreten, da hier ein Schritt getan werden muss, der dem Sprung von der klassischen in die relativistische Mechanik entspricht: man muss sich zu der Hypothese durchringen, dass die Anfangszustände immer schon so sind, dass man im Hilbertraum I ist. Aber dieses mein „Verbot" ist weniger revolutionär als das „Pauli-Verbot": Du musstest zusätzlich behaupten, dass alle ~~Lösungen~~ Anfangszustände schon antimetrisch sind. Ich muss nur behaupten, dass sie von vornherein Lösungen der Gl. $H\psi = E\psi$ (und nicht etwa der komplizierteren Gl. $H\psi_B = E\psi_B + C\psi_A$) sind, und das hatte Schrödinger vor 30 Jahren ja auch schon gefordert, diese Forderung ist also keineswegs originell.

All das setzt natürlich die Existenz von Streuzuständen im Hilbertraum I (sonst könnte man Streuvorgänge nicht darstellen) voraus. Du willst vielleicht die Konvergenz der Neumannreihe nicht glauben. Aber ich möchte doch ausdrücklich fragen, ob Du dann, *wenn* die Streuzustände im Hilbertraum I existieren, mit meiner Analyse einverstanden bist, *soweit sie die Mathematik betrifft*, und Deine physikalischen Vorbehalte *nur von der Frage der Kausalitätsverletzungen* kommen.

Zu der Festlegung der Konstante b in (3), vor der δ-Funktion, sei noch bemerkt, dass die Mathematik dann, wenn b nicht bestimmt wäre, d.h. wenn man noch frei wählen könnte, ob u. mit welcher Intensität V_0-Teilchen einlaufen, nicht mehr physikalisch interpretiert werden könnte. Denn dann wäre das Problem durch die einfallenden N u. Θ-Teilchen nicht mehr vollständig bestimmt. ~~Aber~~ Woher sollte man physikalisch wissen, wieviel V_0-Teilchen einfallen, da sie ja (wegen der Norm Null) weder Energie noch Impuls besitzen? Die Festlegung von b durch (3) ist also für die Interpretierbarkeit entscheidend.

Du fragst mich noch nach Källéns Rechnungen. Mit diesen ~~Damit~~ (bin ich natürlich völlig einverstanden; ich hatte dir ja schon vorher geschrieben, dass die E.F. von V_{dip} nötig sei, um die Lösung für ein lokales Problem darzustellen. Mit meiner Analyse scheinen mir die Källén'schen Resultate voll im Einklang, bedeuten allerdings nur wenig für die Aufklärung der gestellten Probleme. Wenn man die Frage nach dem Vorzeichen der Norm eines diskreten stationären Zustands im System N + V = 2N + Θ ernsthaft behandeln wollte, müsste man die E.F. in ihrem asymptotischen Verhalten für grosse Abstände zwischen N und V untersuchen (was Källén nicht getan hat (weil er überhaupt keine Qu. Mech. für die schweren Massen geschrieben hat.)). Aus der Forderung, dass $H\psi = E\psi$

auch asymptotisch gelten soll, wird möglicherweise folgen, dass in der S.F. die beiden Eigenzustände der Källén'schen Rechnung in einer bestimmten Mischung auftreten. Jedenfalls aber wird die Norm dieses gebundenen Zustands (wenn er existiert, was wiederum Källén nicht gezeigt hat) positiv sein, wie man sofort sieht, wenn man ihn (etwa durch ein äusseres „elektrisches" Feld) in seine Bestandteile $N + V_0$ und $2N + \Theta$ zerlegt; (und $N + V_{dip}$ kann nicht vorkommen wegen $H\psi = E\psi$.) denn der erste Anteil gibt Null, der zweite etwas positives. Dass für kleine Abstände zwischen N u. V dabei ein Geister-Zustand mit negativer Norm mitspielt, schadet ebensowenig, wie das Mitspielen des nackten V-Teilchens mit negativer Norm im System $N + \Theta$.

Aber, wie gesagt, im Augenblick sind mir die physikalischen Glaubensbekenntnisse uninteressant, aber die Einigung über die Mathematik wäre mir sehr wichtig. Ich bitte Dich also noch um etwas Geduld, und insbesondere darum, mir die Stellen anzugeben, wo Du mit meiner mathematischen Analyse nicht einverstanden bist, falls es solche noch gibt.

Mit vielen Grüssen

Dein W. Heisenberg