Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 28.01.1957
Stichworte: Unitarität der S-Matrix, keine Doppelpole, Funktionentheoretische Argumente gegen Paulis Kritik
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-1601r
Meyenn-Nummer: 2477

Göttingen 28. 1. 57.

Lieber Pauli!

Es tut mir leid, dass ich Dich trotz Deines so „definitiven" Briefs nochmal mit dem Dipolgeist beschäftigen muss. Aber Dein Brief enthält, so viel ich sehe, grobe mathematische Fehler, und es muss doch schliesslich möglich sein, dass wir uns über mathematische Tatbestände einigen.

Du behauptest, dass die Funktion $\Phi(k)$, definiert als Fouriertransformierte von $\Phi(x)$, einen Doppelpol an der kritischen Stelle (sagen wir: $k = k_0$) besitzt. Das Integral soll dann durch „Umgehung" des Pols im Komplexen definiert werden. Es soll sich also, wenn ich Dich recht verstehe, $\Phi(k)$ etwa wie

$$\Phi(k) \approx \lim_{\delta \to 0} \frac{\text{const}}{(k - k_0 - i\delta)^2}$$

verhalten. Das bedeutet für $\Phi(x)$

$$\Phi(r) = \text{const} \int dk \frac{e^{ikr}}{(k - k_0 - i\delta)^2} = \text{const} \cdot \frac{d}{dk_0} \int dk \frac{e^{ikr}}{k - k_0 - i\delta}$$

$$= \frac{2\pi\, d}{i r\, dk_0} \int \frac{k\, dk\, (e^{ikr} - e^{-ikr})}{k - k_0 - i\delta} = \frac{4\pi^2}{r} \frac{d}{dk_0} \cdot \left(k_0 e^{ik_0 r}\right)$$

$$= \frac{4\pi^2}{r} (1 + i k_0 r)\, e^{ik_0 r} .$$

Du hast dann also an dieser Stelle <u>nicht</u> etwa eine auslaufende Kugelwelle, sondern ein anderes

Gebilde (wegen des Faktors $1+ik_0r$), um dessen physikalische Interpretation ich Dich nicht beneide.

In Wirklichkeit wird die Lösung der Hamiltongleichung $H\psi = E\psi$ aber kaum für grosse r so aussehen können, da für grosse r die Wechselwirkung verschwindet, also eine Lösung von $\Delta\psi = \text{const}\ \psi$ übrigbleiben muss. In anderen Worten: Deine Behauptung, dass es eine Lösung der Gleichung $H\psi = E\psi$ mit Doppelpol gebe, halte ich für völlig falsch.

Man kann das auch noch in folgender Weise einsehen: Die Funktion $\Phi(k)$ ist zunächst nur für reelle k definiert und es wird von $\Phi(r)$ vorausgesetzt, dass es eine Fourier-entwicklung gebe. Für den einfachen Pol geht das sozusagen eben noch, denn der Hauptwert des Integrals existiert, und dazu kann eine δ-Funktion gefügt (beides zusammen = in komplexes Integral zusammengefasst) werden. Beim Doppelpol aber existiert schon der Hauptwert nicht mehr, woraus man sofort erkennt, dass man im räumlich Unendlichen etwas verdorben hat. Jedenfalls: wenn Du behauptest, dem absurden Doppelpol einen Sinn geben zu können, so liegt die ganze Beweislast bei Dir, und einfach zu schreiben, man müsse „im Komplexen integrieren", ist etwas unter Deinem Niveau.

Inzwischen haben wir aber hier auch den vollständigen

Beweis dafür führen können, dass die S-Matrix in sämtlichen Sektoren unitär (aber nicht ~~stetig~~ kausal) ist und die diskreten stationären Zustände stets positive (oder verschwindende) Norm haben. Ich will Ihnen den Beweis hier vorführen:

Es soll sich also um die Lösungen von $H\psi = E\psi$ handeln, wobei die ψ stets im Ortsraum dargestellt werden. Zur Gleichung $H\psi = E\psi$ muss man bekanntlich noch Randbedingungen hinzufügen, um die stationären Zustände zu definieren. Es sollen im Folgenden nur Lösungen betrachtet werden, die im Unendlichen sich „quantenmechanisch normal" verhalten. (Damit ist folgendes gemeint: in ~~diesem~~ einem Raumgebiet, in dem etwa die $r_1, r_2 \ldots r_n$ räumlich benachbart sind, aber die $r_{n+1} \ldots r_z$ untereinander benachbart, aber weit von $r_1 \ldots r_n$ entfernt, soll die Lösung sich als Summe von Produkten von Funktionen darstellen lassen, die einzeln die Gleichung $H\psi = E\psi$ (in jedem der beiden Gebiete) befriedigen.

d.h. $\psi(r_1 \ldots r_z)$ für $(r_1 \ldots r_n)$ weit von $(r_{n+1}, \ldots r_z)$ $\rightarrow \sum_l \chi_l(r_1 \ldots r_n)\, \phi_l(r_{n+1}, \ldots r_z)$,

wobei $H\chi_l = \text{const.}\, \chi_l$; $H\phi_l = \text{const.}\, \phi_l$.

Ob es noch andere Lösungen gibt, will ich dahingestellt sein lassen, jedenfalls sollen sie nicht diskutiert werden. Ferner sollen die Lösungen von den Schwerpunkten der Häufchen $(r_1 \ldots r_n)$ bzw. $(r_{n+1} \ldots r_z)$ entweder wie Wellen z.B. e^{ikr} bzw. $\frac{1}{r}e^{ikr}$ oder wie exponentiell abnehmende Funktionen z.B. $\frac{1}{r}e^{-kr}$ abhängen, aber nicht wie exponentiell zunehmende Funktionen; das letztere soll wie in der Qu. Mech. ausgeschlossen werden. Es gibt auch Grenzzustände dieses normalen Typs, nämlich die mit dem einfachen Pol; die andern mit dem Doppelpol – falls man ihnen irgendeinen Sinn als Lösung geben könnte, wofür die Beweislast bei Dir läge – fallen jedenfalls nicht unter die betrachteten Funktionen.

Ich will nun zunächst zeigen, dass diskrete stationäre Zustände, wenn sie zu dieser normalen Gruppe gehören, niemals eine negative Norm haben können. Wir denken etwa speziell an den Fall $N + 2\theta$, aber der Beweis lässt sich leicht verallgemeinern. Wir ~~denken uns dann die~~ nehmen jetzt an, dass die Hamiltonfunktion dadurch leicht abgeändert ~~ist~~ werde, dass wir ein sehr schwaches elektrisches Feld zufügen, das etwa nur auf das θ-Teilchen der Koordinate x_1 wirkt (dass man hier die Symmetrie zwischen x_1 u. x_2 zerstört, schadet nichts u. vereinfacht die Überlegung). Da das Feld sehr klein ist, stört es die E.F. des stationären Zustands praktisch nicht. Wohl aber hat es durch Tunneleffekt in der üblichen Weise zur Folge, dass nach sehr langer Zeit das θ_1-Teilchen ausgelaufen ist u. ein stationärer Zustand des $N+\theta$-Systems einerseits, das θ_1-Teilchen andererseits übrigbleibt. Im letzteren Fall ist die Norm der Einzelzustände, in die der Gesamtzustand zerfällt ist entweder Null (wenn immer das V_0-System übrigbleibt; – V_{dip} kann nicht vorkommen) (wenn immer ein Kontinuumszustand übrig bleibt), oder positiv; also die Gesamtnorm (Summe der Normen der Teilzustände) sicher nicht negativ. Da die Gesamtnorm aber zeitlich konstant bleibt, wie Du in Deinem letzten Brief mit Recht hervorhebst, war die Norm auch vorher schon positiv; d.h. der stationäre Zustand hatte eine positive Norm, obwohl er zu seiner Darstellung auch ~~die~~ den Vektor im Hilbertraum V_{dip} benötigt (im letzteren Punkt bin ich also mit Källén völlig einig). Das, was ich eben schrieb, ist übrigens nur eine physikalische Umformung des funktionentheoretischen Arguments in meinem letzten Brief. – Der Schluss von einem Sektor zum nächsthöheren ist trivial, ich brauche ihn wohl nicht im Einzelnen vorzuführen.

Nun genügt ein einziger kleiner Schritt zum vollständigen Beweis: Wir postulieren: alle physikalisch vorkommenden Zustände werden durch (im Sinne der obigen Definition) normale Wellenfunktionen repräsentiert. Da es unter den normalen Funktionen je auch Streuzustände gibt (nämlich die mit einfachem Pol), kann man ~~also~~ auch einlaufende Wellenpakete beliebiger Art (oder jedenfalls: innerhalb gewisser Grenzen beliebiger ~~Z~~ Art) darstellen. Das durch die Randbedingungen charakterisierte „normale" Funktionensystem ist also jedenfalls für die physikalischen Bedürfnisse vollständig. Die Unitarität der S-Matrix ist jetzt trivial. Aber es gibt natürlich die Abweichung von der Kausalität, die sich in der einlaufenden virtuellen Nullwelle (ohne physikalische Deutung) manifestiert.

Bevor wir über die Abweichungen von der Kausalität debattieren, muss ich aber jetzt zuerst die präzise Frage ~~Z~~ stellen: Sind wir darüber einig, dass <u>innerhalb des „normalen" Funktionensystems</u> die S-Matrix bei Streuung stets unitär ist und nur Zustände positiver (oder verschwindender) Norm vorkommen? Solltest Du hier nicht einfach mit „Ja" antworten können, so bitte ich um wirklich präzise mathematische Argumente.

Erst nach der Einigung hierüber käme die Frage, ob sich die Physik so darstellen lässt; aber das ist dann eine Frage nach dem Grad der Abweichung von der Kausalität, und hier habe ich nicht allzuviel Sorge.

Ich wäre Dir wirklich dankbar, wenn wir hier die Mathematik <u>bis zum letzten Rest</u> aufklären könnten.

Mit vielen Grüssen

Dein W. Heisenberg