Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 23.01.1957
Stichworte: Beweis für Unitarität der S-Matrix im Lee-Modell mit "Dipol-Geist"
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-159r
Meyenn-Nummer: 2470

Göttingen 23.1.57.

Lieber Pauli!

Seit meinem Brief von vorgestern sind wir noch ein gutes Stück weitergekommen und glauben den Beweis vor uns zu sehen, dass tatsächlich in <u>allen</u> Sektoren des Lee-Modells mit Dipolgeist die S-Matrix unitär ist u. die diskreten stationären Zustände niemals eine negative Norm haben. Ich will Dir den Gedankengang schreiben, obwohl im Einzelnen noch nicht alles ausgeführt ist, da er zum Verständnis jenes gesuchten „allgemeinen mathematischen Prinzips" beiträgt.

Zunächst betrachte man (in den Sektoren $N+\theta$ u. $N+2\theta$; das andere kommt später) die Eigenfunktionen nicht im Impulsraum, sondern im <u>Ortsraum</u>. Dabei kann man sich das N- und V-Teilchen im Schwerpunkt $r=0$ vorstellen, die verschiedenen r-Koordinaten bedeuten also Abstände der θ-Teilchen vom Schwerpunkt. Im Sektor $N+\theta$ hat man also eine Konstante $\psi_V = c$ und eine Funktion $\psi_{N,\theta} = \varphi(r)$ zur Charakterisierung eines Zustands. Die E.F. eines Zustands im Kontinuum wird sich für grosse r wie eine Welle verhalten, im diskreten Spektrum wie e^{-kr}, wobei k aus dem Energiewert in der üblichen Weise folgt.

Wir betrachten nun Lösungen der Hamiltongleichung im Sektor $N+2\theta$, charakterisiert durch zwei Funktionen: $\psi_{V+\theta} = \Phi_1(r_1)$; $\psi_{N+2\theta} = \Phi_2(r_1, r_2)$, und fragen nach dem asymptotischen Verhalten in einem Raumgebiet, in dem r_1 sehr gross ist gegenüber r_2 und gegenüber der Ausdehnung der Wellenfunktionen in den stationären Zuständen von $N+\theta$. Auch in diesem Raumgebiet muss die Schrödingergleichung erfüllt sein. Hier zerfällt aber der Hamiltonoperator additiv in einen Teil, der sich auf $N+\theta$ bezieht u. einen anderen, der sich ~~auf~~ auf das zweite θ bezieht; die Wechselwirkung verschwindet wegen des grossen Abstands. Also muss die Lösung sich hier, ~~additiv~~ wegen der Separierbarkeit, additiv zerlegen lassen in Produkte von Lösungen des $N+\theta$-Problems u. des θ Problems für sich.

Daraus folgt erstens, dass in dieser Zerlegung der Zustand V_{dip} des $N+\theta$-Systems nicht vorkommt, weil er keine Lösung der Schrödingergleichung ist. Zweitens folgt, dass $\Phi_1(k)$ im Impulsraum an der bekannten kritischen Stelle einen *einfachen* Pol hat und keinen Pol 2. Ordnung haben kann. Denn die Schrödingergleichung für das einfache θ-Teilchen lautet $\cancel{\Delta\chi = \text{const.}\,\chi}$ $\Delta\varphi = \text{const.}\cdot\varphi$, und nur der *einfache* Pol liefert eine Lösung dieser

Gleichung, nämlich $\frac{1}{r}e^{ikr}$, während der Pol 2. Ordnung etwa zu $\frac{a+br}{r}e^{\pm ikr}$ führen würde, was keine Lösung von $\Delta\varphi = \text{const.}\cdot\varphi$ ist. Man bekommt also einen unabhängigen Beweis dafür, dass es nur Lösungen mit dem einfachen Pol geben kann.

Weiter folgt aber sofort die Unitarität der S-Matrix; denn wenn der Zustand V_{dip} von $N+\theta$ in der asymptotischen Lösung nicht vorkommt, spielt sich das Streuproblem nur in der Form

$$\left.\begin{matrix} N+2\theta \\ N+V_0\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} N+2\theta \\ N+V_0\end{matrix}\right.$$

ab und dabei kann man V_0 als eine Art Blindstrom einfach weglassen, die S-Matrix $N+2\theta \leftrightarrow N+2\theta$ wird unitär, wie man unmittelbar nachrechnet.

Es muss aber hervorgehoben werden, dass für kleine Werte von $\varkappa_1$ der Zustandsvektor sich keineswegs nur mit den Zuständen V_0 und Kontinuum des Systems $N+\theta$ aufbauen lässt; vielmehr wird hier auch V_{dip} sicher gebraucht. (Über die Konsequenzen dieses Sachverhalts für das System $2N+\theta$ siehe später!).

Betrachtet man jetzt die diskreten stationären Zustände des Systems $N+2\theta$, so wird in ihrer Wellenfunktion sicher auch V_{dip} vorkommen. Trotzdem kann man beweisen, (an dieser Stelle sind wir noch nicht ganz sicher!), dass die Norm nicht negativ sein kann. Man berechne nämlich die Norm im k-Raum, indem man zunächst nur über k_2 integriert: $-|\Phi_1^2(k_1)| + \int dk_2 |\Phi_2^2(k_1, k_2)|$, erst dann über k_1. Das Integral über k_1 lässt sich nach Ausführung der Winkelintegration umschreiben in eins über dk_1 von 0 bis ∞, und wegen der Symmetrie des Ausdrucks unter dem Integral auch in eines von $-\infty$ bis $+\infty$. In dieser letzteren Gestalt verschiebt man in der komplexen k_1-Ebene den Integrationsweg, sodass er nur an den Polen (das sind jetzt Pole 2. Ordnung, da $|\Phi^2(k_1)|$) hängen bleibt. Die Pole aber entsprechen den Eigenwerten des $N+\theta$-Systems. Hier weiss man, dass alle Zustände des Kontinuums positive Beiträge zur Norm beisteuern, der Zustand V_0 aber nichts ~~bloß~~ beisteuert, da seine Norm verschwindet. Also kann die Norm im Ganzen nicht negativ sein. – Dieser letzte Teil des Beweises ist aber noch nicht ganz hieb- u. stichfest.

Damit hätte man für das System $N+2\theta$ alles erledigt. Man sieht aber auch, dass der Schluss von $N+2\theta$ auf $N+3\theta$ genau so gezogen werden kann, wie der von $N+\theta$ auf $N+2\theta$. In anderen Worten:

Man kann immer ein weiteres Teilchen zufügen und nach dem gleichen Verfahren wie oben schliessen, dass der behauptete Satz (unitäre S-Matrix und nicht-negative Norm aller stationären Zustände) auch für den höheren Sektor gilt.

Man erkennt jetzt auch, dass das, was ich über den Sektor $2N + \theta$ schrieb, zum Teil Unsinn war. Meine beiden Forderungen 1. und 2. waren falsch. Der Zustand V_{dip} wird immer in der Eigenfunktion vorkommen. Aber trotzdem ist die S-Matrix für $2N+\theta \longleftrightarrow 2N+\theta$ unitär, da sie bis auf den „Blindstrom" identisch ist mit der für

$$\left.\begin{matrix} 2N+\theta \\ N+V_0 \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2N+\theta \\ N+V_0 \end{matrix}\right. ,$$

und V_{dip} asymptotisch nicht vorkommen kann. Für eventuell vorhandene diskrete stationäre Zustände gilt nur, dass ihre Norm nicht negativ sein kann. Dabei ist allerdings die anständige quantenmechanische Behandlung, bei der der Abstand ~~[illegible]~~ zwischen N und V in der Wellenfunktion vorkommt u. beliebig gross werden kann, die Voraussetzung. Die Behandlungsmethode von Weinberg scheint mir hier von vornherein ungeeignet, da sie durch die Annahme der feststehenden Teilchen N u. V die entscheidenden Effekte ruiniert.

Ob die Beweise alle genau so gehen, wie hier skizziert, muss sich erst herausstellen. Aber Du siehst wohl jetzt, was die entscheidenden Elemente sind: Die Hamiltonfunktion muss die Eigenschaft haben, dass die Wechselwirkung bei grosser Entfernung verschwindet. Diese Voraussetzung scheint beim Lee-Modell erfüllt und ist es wohl auch sicher in meinem Modell.

Hoffentlich kann ich Dir in einigen Tagen den Beweis ~~in~~ noch sorgfältigerer Form schicken.

Viele Grüsse!

Dein W. Heisenberg