Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 29.04.1935
Stichworte: Antwort auf Paulis Kommentare zum Manuskript vom 25.04.1935, Die Verschmierungsbreite Δ charakterisiert den Messapparat und eliminiert die Selbstenergien in der Feldtheorie
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-089r
Meyenn-Nummer: 408

Leipzig 29. 4. 35

Lieber Pauli!

Bevor ich auf die schwierigeren Fragen deines Briefes eingehe, möchte ich deine letzte Frage beantworten, die mir – mit Verlaub gesagt – auf eine gewisse Denkfaulheit in Zürich hinzudeuten scheint. Die Glg. (4) meines Manuskripts bedeuten Relationen, die in der bisherigen Löchertheorie gelten; u. zwar gelten sie nicht als quantenmech. Gleichungen – denn die linke Seite operiert auf Lichtquantenzahlen, die rechte nur auf Elektronenzahlen – sondern als Nebenbedingungen (wie $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho$). Der Sinn dieser Gleichungen ist also folgender: Jede Schrödingerfunktion, welche die bisher. Löchertheorie löst (– die man also z. B. durch Entwickeln nach $\frac{e^2}{\hbar c}$ gewinnen kann –) hat die Eigenschaft, dass die Anwendung der linken Seite von (4) auf sie dasselbe gibt, wie die Anwendung der rechten Seite. Nehmen wir nun an, dass von der Schrödingerfunktion $\Phi(\overset{\text{El.}}{N_1 N_2 \ldots}, \overset{\text{Lichtqu.}}{M_1, M_2 \ldots})$ nur der „Ausschnitt" $\Phi(N_1, N_2 \ldots, 0\ 0\ 0 \ldots)$ bekannt sei. Dann kann man durch Anwenden der linken Seite von (4) zu $\Phi(N_1\, N_2 \ldots ;\ 1\, 0\, 0)$ übergehen; die rechte Seite verändert (aber) nur die $N_1\, N_2$; d.h. Gl(4) gestattet, die anderen Zeilen $\Phi(N_1\, N_2 \ldots\ 1\, 0\, 0)$ u.s.w. auszurechnen, wenn $\Phi(N_1\, N_2 \ldots ;\ 0\, 0 \ldots)$ bekannt ist. Dass die Gl.(4) in dieser Form wirklich gilt, kann man kontrollieren, indem man das Schrödingerfunktional durch Entwickeln nach $\frac{e^2}{\hbar c}$ berechnet. Die Hamiltonfunktion (8) enthält nun nur die Dichtematrize, es kommen also in ihr nur Operatoren vor, die die N_k verändern, sie führen ein Element $\Phi(N_1\, N_2 \ldots ,\ 0\, 0\, 0 \ldots)$ immer wieder in ein Element der gleichen Art über. Also kann man Gl(8) auffassen als Hamiltongleichung für $\Phi(N_1\, N_2 \ldots ;\ 0\,0\,0\,0 \ldots)$ (wobei man die Nullen dann auch streichen kann). Will man im Sinne der früheren Theorie auch die Elemente für $M_k \neq 0$ haben, so muss man Gl (4) anwenden und erhält sie aus $\Phi(N_1 \ldots ;\ 0\,0 \ldots)$.

Die Emission eines Lichtquants (vom Impuls $\mathfrak{k}$) drückt sich – näherungsweise – im Schrödingerfunktional so aus:

$$\Phi(\underbrace{0\,0\,\underset{\mathfrak{p}}{1}\,0\,0}_{\text{El.}},\ \underbrace{0\,\underset{-\mathfrak{p}+\mathfrak{k}}{1}\,0\,0}_{\text{Positron}}\ ;\ \underbrace{0\,0\,0\,0}_{\text{Lichtqu.}}) = + \frac{\text{Const}}{-|\mathfrak{k}| + \sqrt{m^2c^2+p^2} + \sqrt{m^2c^2+(\mathfrak{k}-\mathfrak{p})^2}}\,.$$

Die Lichtemission stellt sich also so dar: Zur Zeit $t=0$ ist etwa nur $\Phi(1\,0\,0;\ 0\,0\,0;\ 0\,0\,0)$ merklich von Null verschieden (dass dies keine Lösung ist, ist im Augenblick nicht wichtig). Nach einiger Zeit aber werden die Φ auch dort von Null verschieden sein, wo Paare vom Impuls p vorhanden sind: $\Phi(100\overset{q}{1};\,00\overset{q-q}{1}0;\,000)$. – Also hoffentlich ist dies jetzt klar; sonst kann ich auch noch ausführlicher schreiben.

Noch eine Bemerkung: es ist trivial, dass eine Theorie vom Typus (8), wenn sie richtig ist, immer $\frac{e^2}{\hbar c}$ festlegt. Denn <u>e</u> kommt in (8) garnicht vor; (8) führt also z.B. zu einer Abstossung von Elektronen, die aus Dimensionsgründen nur die Form const. $\frac{\hbar c}{r}$ haben kann. Wenn sie mit der Coulombschen Abstossung korrespondenzmässig übereinstimmen soll, so folgt const. $\frac{\hbar c}{r} = \frac{e^2}{r}$, und $\frac{e^2}{\hbar c}$ ist festgelegt.

Nun zu den übrigen Bemerkungen und Fragen Deines Briefs. Über den Punkt 1) (Symmetrie in den Erhaltungssätzen) hab ich keine bestimmte Meinung. Zu 2) – stärkere Annäherung an Deinen u. Jordans Formalismus – bin ich mit Dir ziemlich einig. Ich schrieb ja auch in meinem Manuskript, dass eigentlich Raum- <u>und</u> Zeitmittelung vorzunehmen seien. Bei einer solchen Formulierung würde auch die relativistische

Invarianz klar herauskommen. Es würde zwar die Funktion (oder die ihr entsprechende Raum-Zeitfunktion) Δ) immer ein Koordinatensystem auszeichnen, aber das würde nur der Tatsache entsprechen, dass ja ein Messapparat auch ein Koordinatensystem auszeichnet. Die Willkür in der Wahl von Δ würde die Invarianz ~~von~~ des Formalismus wiederherstellen. – ~~Was~~ Die sogenannte „zweite" Quantelung halte ich von jeher – als Bezeichnung wie als Sache – für völlige Idiotie gehalten (vgl. mein Buch). Ich bin also hier mit Deiner Formulierg. völlig einig; glaube aber, dass in diesem Punkt jeder Formalismus vom Typus (8) befriedigend wäre. – Mit dem, was Du unter Punkt 3) schreibst, bin ich ganz einverstanden.

Die Hauptfrage Deines Briefes ist wohl: „Welchen physikalischen Sinn bekommen die von Δ abhängigen Werte der Selbstenergien der Teilchen bei solchen Experimenten, bei welchen eine Beschränkg. des zur Verfügung stehenden Raum-Zeitbereichs keine Rolle spielt." Meine Antwort muss natürlich lauten: „Da treten sie garnicht auf." Denn wenn keine raumzeitlichen Beschränkungen eine Rolle spielen, so muss es möglich sein, alles was geschieht, mit sehr verschmierten ψ-Funktionen zu beschreiben, und bei denen werden die Selbstenergien von selbst nicht auftreten. In dem Δ-Formalismus ist es ja so: sobald die Funktion Δ breiter wird als $\frac{\hbar}{mc}$ (oder von dieser Ordnung), spielt die vom Feld herrührende Selbstenergie keine Rolle mehr (sie wird von der Ordnung $\frac{e^2}{\hbar c} \cdot mc^2$). Nur wenn man die Selbstenergie bestimmt mit einer Anordnung, die eine sehr scharfe räumliche Festlegung ermöglicht (die Breite von $\Delta \ll \frac{\hbar}{mc}$), so wird die Selbstenergie im Formalismus auftreten und dies könnte sehr wohl als Wirkung des Messapparates gedeutet werden.*)

Übrigens ist mir im Augenblick die Interpretation der übrigen Subtraktionsphysik wichtiger als gerade die Selbstenergie, die vielleicht durch den Effekt von Euler u. Kockel noch entscheidend geändert werden kann. (Ich bin auf Weisskopfs Brief sehr gespannt). Wenn Du willst, kannst Du also den Δ-Formalismus einstweilen nur als Erweiterung und Interpretation der Subtraktionsphysik auffassen, die aber jetzt (– was Du früher einmal mit Weisskopf versuchtest u. was an den Lichtquanten scheiterte –) auch die Selbstenergie abzuziehen gestattet. Denn die Vorschrift: nur den von Δ unabhängigen Teil zu nehmen, ist natürlich dasselbe wie: alles von Δ abhängige abziehen. Die früher bei den Lichtquanten auftretende Schwierigkeit besteht jetzt nicht mehr, weil der

*) Anschaulich: für ~~Mess~~ schlechte Messapparate, die nicht genauer als $\frac{\hbar}{mc}$ messen lassen, ist das Elektron auch so gross u. hat dementsprechend keine nennenswerte Selbstenergie.

$r' \to r'' \to 0$
Grenzprozess $\Delta \to \delta$ überhaupt nicht ausgeführt wird.

Aber ich glaube natürlich nicht, dass in dieser Subtraktionerei das Heil zu suchen ist, sondern das ~~Erste~~ Auftreten der von Δ abhängigen Glieder muss einen bestimmten Sinn haben – und dieser kann eigentlich nur der sein, dass Δ den Messapparat charakterisiert. Wie im Einzelnen die von Δ abhängigen Glieder zu interpretieren sind, lässt sich natürlich erst beantworten, wenn der richtige Formalismus gefunden ist. Ähnlich wie die Qu. Mech. auf der Forderung beruht: „das Resultat einer Beobachtung muss unabhängig von der Lage des ‚Schnittes' sein" – so fordert die genannte Interpretation der Δ abhängigen Glieder einen bestimmten inneren Zusammenhang der Theorie, dessen formaler Ausdruck einstweilen unbekannt ist.

Es würde mich interessieren, insbesondere Deine Meinung über den ersten Teil dieses Briefs zu hören. ($\frac{e^2}{\hbar c}$).

Viele Grüsse!

Dein W. Heisenberg.

Heisenberg 25. I. 35

Gegen die bisherige Form der Qu.El.Dyn. können im Wesentlichen zwei Einwände vorgebracht werden:

1.) Ihr Formalismus führt zu unendlichen Selbstenergien der Teilchen und enthält daher Widersprüche. Mit dieser bekannten und daher nicht weiter zu besprechenden Schwierigkeit hängt wahrscheinlich eine andere formale Unschönheit der bisherigen Theorie eng zusammen: Um in der Qu.El.Dyn., die der Existenz der Positronen Rechnung trägt, vernünftige Resultate zu bekommen, muss man die physikalischen Grössen durch komplizierte Grenzprozesse definieren ("Subtraktionsphysik"). Diese Grenzprozesse sind zwar unbedingt notwendig, um die Konvergenz des Verfahrens wenigstens in den ersten Näherungen zu sichern, sie können aber das Unendlichwerden der Selbstenergie in 2.Ordnung nicht hindern, man wird daher aus diesen und aus formalen Gründen kaum annehmen, dass sie in der endgültigen Theorie eine Rolle spielen werden.

2.) Der zweite Einwand richtet sich gegen die zu eng an die klassische Theorie angepasste Form der bisherigen Qu.El.Dyn. Solange in der Qu.El.Dyn. Licht und Materie als zwei verschiedene Arten von Feldern erscheinen, muss wohl die Sommerfeldsche Konstante $\frac{e^2}{\hbar c}$ unbestimmt bleiben. Es ist aber nicht wahrscheinlich, dass eine vernünftige Formulierung der Qu.El.Dyn. ohne Festlegung von $\frac{e^2}{\hbar c}$ möglich ist. Diese Vermutung wird noch gestützt durch den Umstand, dass in der Löchertheorie eine vernünftige Trennung in Licht- und Materiefeld gar nicht möglich ist; ferner auch durch die Resultate von Euler und Kockel.

Nun lässt sich in der Diracschen Theorie des Positrons - im Gegensatz zu allen früheren Formen der Qu.El.Dyn. - diese Vereinheitlichung von Materie- und Strahlungsfeld formal durchführen, wenn man die unter 1.) kritisierten Grenzprozesse in der Formulierung der Theorie in noch grösserem Umfang als bisher zulässt. Diese Möglichkeit beruht auf einem merkwürdigen mathematischen Zusammenhang zwischen Materiefeld und Strahlungsfeld, der nur in der Löchertheorie auftritt und für den es ein anschauliches korrespondenzmässiges Analogon kaum geben dürfte.

~~(1)~~ Sei

$$(1) \qquad (r'k'|R|k''r'') = \frac{1}{2}\left[\psi^*(r'k')\psi(r''k'') - \psi(r''k'')\psi^*(r'k')\right]$$

die Diracsche Dichtematrix, und gilt wie üblich

$$(2) \qquad \psi^*(r'k')\psi(r''k'') + \psi(r''k'')\psi^*(r'k') = \delta(r'-r'')\,\delta_{k'k''},$$

so führt, wenn fast alle Zustände negativer Energie besetzt sind, die Diracgleichung:

$$(3) \quad \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{e}{c}A_0(r') + \alpha_s\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial x'_s} - \frac{e}{c}A_s(r')\right] + \beta mc\right\}(r'k'|R|k''r'') = 0$$

zu folgender Relation:

$$(4) \quad \begin{cases} A_l(r') = \frac{3}{2}\frac{\hbar c}{e}\pi^2 \lim\limits_{\Delta\to\delta} \int \sum\limits_{k'k''} (\alpha^l)_{k''k'}\,(r'k'|R|r''k'')\,\Delta(r'-r'')\,|r'-r''|^2\, dr'' \\ f_l(r') = 3\frac{\hbar c}{e}\pi^2 \lim\limits_{\Delta\to\delta} \int \sum\limits_{\substack{k'k'' \\ s\neq l}} (\alpha^l\alpha^s)_{k''k'}\,(r'k'|R|r''k'')\,\frac{\partial}{\partial x'_s}\left[\Delta(r'-r'')\,|r'-r''|^2\right] dr'' . \end{cases}$$

Hierin bedeutet Δ eine steilabfallende Funktion von ~~(x'-x")~~ $|x'-x''|$, deren Volumintegral 1 ist: $\int \Delta(|x'-x''|)dV'' = 1$ und die im limes $\Delta \to \delta$ in die Diracsche δ-Funktion übergeht.

Diese Gleichungen (4) gestatten - unabhängig von den Maxwellschen Gleichungen - die Berechnung des Strahlungsfeldes aus dem Materiefeld.

Die Existenz einer Beziehung der Art (4) in der Löchertheorie kann man sich plausibel machen, wenn man beachtet, dass schon der singuläre Teil der Diracschen Dichtemetrix (- der von den unendlich vielen besetzten Zuständen herrührt -) durch jedes äussere Feld verändert wird, und zwar unabhängig von der Anzahl etwa ~~schon~~ vorhandener Teilchen; also kann umgekehrt aus diesem singulären Teil auf die elektromagnetischen Felder geschlossen werden.

Durch die Gleichungen (4) kann man formal das Strahlungsfeld völlig aus den Gleichungen der Qu.El.Dyn. eliminieren. Man erhält dann eine Hamiltonfunktion, die ~~mit~~ nur von der Dichtematrix (' R ") - und zwar quadratisch - abhängt. Diese Hamiltonfunktion ist jedoch sehr kompliziert und unschön gebaut, es kommen in ihr an vielen Stellen Grenzprozesse vor, auf deren Reihenfolge ausserdem noch geachtet werden muss. Man könnte aber hoffen, auf diesem Wege zu einer einfachen einheitlichen Theorie von Licht und Materie zu kommen, wenn es gelänge, die besprochenen Grenzprozesse ganz aus der Theorie zu beseitigen. Damit sind wir wieder bei der unter 1.) genannten Schwierigkeit angekommen.

Zur Diskussion dieser Schwierigkeit soll zunächst an die Untersuchung von Bohr und Rosenfeld erinnert werden, in der es sich herausgestellt hatte, dass nur für die Mittelwerte der Feldstärken über bestimmte Raum-Zeitgebiete einfache Unbestimmtheitsrelationen bestehen; ferner an meine eigenen Rechnungen über die Schwankungen von Energie und ~~Leistung~~ Ladung in einem abgegrenzten Volumen. Das Resultat dieser Arbeiten lässt sich für unseren Zweck kurz so zusammenfassen: Die Feldstärke (oder Wellenfunktion) an einem bestimmten Raum-Zeitpunkt ist überhaupt keine vernünftige physikalische Grösse. Nur der raumzeitliche Mittelwert einer Feldstärke über ein durch unscharfe Grenzen definiertes Gebiet ist einer Messung zugänglich. Die Unschärfe in der Begrenzung des Gebiets ist für das Ergebnis der Messung der Feldstärken von entscheidender Wichtigkeit. Denn je schärfer die begrenzenden Wände sind, desto grösser ist der zur Beobachtung nötige störende Eingriff, ein desto grösserer Fehler wird also das Ergebnis der Messung fälschen. Dabei wird durch die begrenzenden Wände sowohl Energie wie Ladung (Paarerzeugung!) in das Feld hereingebracht.

Kehrt man nun zu den Singularitäten der Positronentheorie zurück, so erkennt man, dass diese Singularitäten sämtlich ihren Grund darin haben, dass bisher die Frage nach dem Wert einer Wellenfunktion oder einer Feldstärke an einem bestimmten Raum-Zeitpunkt gestellt wurde. Sobald jedoch nur die Mittelwerte solcher Feldgrössen über unscharf begrenzte Raum-Zeitgebiete betrachtet werden, so verschwinden alle Singularitäten. Dies erkennt man am einfachsten schon aus den V.R. der $\psi(\mathfrak{r}k)$. Sei wieder $\Delta(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'')$ eine steil abfallende Funktion von $(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'')$, die der Gleichung $\int \Delta \, dV'' = 1$ genügt, so wird

$$\left[\psi^*(\mathfrak{r}'k'), \psi(\mathfrak{r}''k'')\right]_+ = \delta(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'')\,\delta_{k'k''}$$

eine singuläre Funktion der Orte $\mathfrak{r}', \mathfrak{r}''$, jedoch

(5)
$$\left[\int \psi^*(\mathfrak{r}'k')\Delta(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}')\,dV', \int \psi(\mathfrak{r}''k'')\Delta(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}'')\,dV''\right]_+$$

$$= \delta_{k'k''} \int \Delta(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}')\,\Delta(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}')\,dV'$$

eine reguläre Funktion von $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$. Ebenso wird die "gemittelte" Dichtematrix R:

(6)
$$\overline{R} = \iint \Delta(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}')\,\Delta(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}'')\,(\mathfrak{r}'k'|R|k''\mathfrak{r}'')\,dV'dV''$$

stets endlich, wie man aus den Untersuchungen von Dirac leicht ~~wahrnehmen~~ nachrechnen kann. Hierzu genügt bereits die hier durchgeführte Raummittelung, die Zeitmittelung wird deshalb einstweilen weggelassen.

Dieses Ergebnis legt nun den Gedanken nahe, dass man auf die ganzen Regeln der Löchertheorie über das Subtrahieren und ~~Sinus~~Limesbilden verzichten kann, wenn man von vornherein nur die Grössen vom Typus (6) in die Theorie einführt. Es wird sich dann zwar herausstellen, dass bei der Berechnung der nach Analogie zu (6) definierten und aus (6) gebildeten Grössen stets Glieder auftreten, die mit abnehmender Breite der Funktion Δ über jeden Wert hinaus wachsen. Dieses Verhalten wird man aber nicht wie bisher als Zeichen für das Versagen der Theorie deuten müssen, sondern vielleicht auffassen sollen als die physikalisch zuerwartende Wirkung der Apparate, mit denen das betreffende Feld mit der Genauigkeit Δ ausgemessen wird. Da auch der störende Eingriff mit abnehmender Breite der Funktion Δ wächst, so hat das Auftreten von Feldwerten, die mit abnehmender Breite von Δ unbegrenzt wachsen, nichts Befremdendes. - Da nicht von vornherein entschieden werden kann, wie weit eine solche physikalische Deutung der von der Breite von Δ abhängigen Teile in der Ladungsdichte, Energiedichte usw. möglich ist, so soll diese Auffassung im folgenden noch genauer diskutiert werden:

Zunächst sei festgestellt, dass die Vorschriften der bisherigen Löchertheorie zu dieser Auffassung besser passen, als es im ersten Augenblick den Anschein hat~~te~~. Bisher wurden ja von der Dichtematrix jene singulären Teile abgezogen, die im limes $\mathfrak{x}' \to \mathfrak{x}''$ unendlich werden; also die Teile, die von der Breite der Funktion $\Delta(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x}'')$ abhängen und deshalb nach der hier versuchten Deutung durch den störenden Einfluss der Beobachtungsmittel bedingt sind. Als physikalisch real wurde nur der dann übrigbleibende, von der Breite der Funktion Δ praktisch unabhängige Rest angesehen. Dieser Rest ist auch nach der hier versuchten Auffassung der "von vornherein objektiv vorhandene", von der Art der Beobachtung unabhängige Betrag von Ladungsdichte, Energiedichte usw., der für viele Fragen allein von Interesse ist. In der Tat war die Abhängigkeit der Teile der Dichtematrix von $(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x}'')$ das einzige wesentliche Kriterium für die Entscheidung der Frage, ob die betreffenden Teile abzuziehen oder beizubehalten seien. Das Abziehen der betreffenden Teile ist andererseits nach der hier versuchten Auffassung nicht berechtigt, denn z.B. auch die durch die Beobachtungsmittel hereingebrachte Ladung erzeugt Maxwellsche Felder, die mit den schon vorher vorhandenen zusammenwirken. - -

Wenn man die theoretische Behandlung eines Problems mit der "gemittelten" Dichtematrix (6) beginnt, so schliesst man damit von vornherein den Beitrag derjenigen Lichtquanten und Elektronen zur Ladungs- und Energiedichte aus, deren Wellenlänge wesentlich kleiner als die Breite der Funktion Δ ist. Dies scheint in der Tat auch der adäquate Ausdruck dessen, was in einer experimentellen Anordnung gemessen wird. Denn etwa die in einem bestimmten Volumen enthaltene gesamte Energie kann wohl kaum wesentlich anders bestimmt werden, als indem man dieses Volumen mit spiegelnden Wänden umgibt und dann etwa die Gesamtmasse dieses Kastens durch Wägung ermittelt. Es wird aber stets Lichtquanten und Elektronen geben (- etwa die der Höhenstrahlung -), die die Wände des Kastens ungehindert durchdringen und die daher bei einer Wägung prinzipiell nicht mit gemessen werden. In ähnlicher Weise wird man sich bei jeder experimentellen Anordnung entschliessen müssen, die Wirkung von Teilchen , deren Energie höher ist als eine allerdings weitgehend willkürlich vorgebbare Grenze, unberücksichtigt zu lassen. Eben diese Vernachlässigung wird durch eine "gemittelte"

Dichtefunktion (6) richtig zum Ausdruck gebracht.

Bildet man aus der gemittelten Dichtematrix (6) Ausdrücke, die der Gesamtenergie oder dem Gesamtimpuls eines bestimmten Volumens in der früheren Theorie entsprechen, so werden diese Ausdrücke zeitlich nicht konstant. Dies ist aber kaum als Einwand zu betrachten, da eben prinzipiell die Möglichkeit nicht auszuschliessen ist, dass einzelne sehr durchdringende Lichtquanten oder Elektronen das abgegrenzte Volumen betreten oder verlassen. Man wird im Gegenteil physikalisch eine gewisse zeitliche Schwankung der Energie und des Impulses eines abgegrenzten Volumens erwarten, die von diesen durchdringenden Teilchen herrührt und die auch im Formalismus der Theorie ihren adäquaten Ausdruck findet.

Diese Ueberlegungen scheinen mir im Ganzen ein starkes Argument dafür zu bilden, dass in der zukünftigen Qu.El. Dyn. die Diskussion des mit jeder Beobachtung verknüpften Eingriffs eine noch wichtigere Rolle spielen wird als in der Qu.Mechanik und dass dieser Eingriff im Gegensatz zur Qu.Mech. e x p l i z i t e in der mathematischen Formulierung der Theorie vorkommen wird. Bei dem Versuch, dieses Programm durchzuführen, tauchten allerdings eine Reihe schwieriger Fragen auf:

Es ist wohl keineswegs zu vermuten, dass bei j e d e m Formalismus, der mit Ausdrücken der Art (6) beginnt, die von der Breite der Funktion Δ abhängigen Teile eines Resultats als die Wirkungen der bei einer Beobachtung notwendigen Eingriffe aufgefasst werden können. Vielmehr wird diese Deutung einen bestimmten inneren Zusammenhang der Theorie voraussetzen, dessen formaler Ausdruck bisher nicht untersucht ist.

Ferner ist wohl kaum zu vermuten, dass man zu einer vernünftigen Feldtheorie kommt, wenn man den bisherigen Formalismus - ohne das Abziehen der bisher abgezogenen Glieder - nach Art des Ausdruckes (6) einfach umschreibt. Vielmehr wird wohl erst in der einheitlichen Theorie, in der Materie und Strahlung auf die gleiche Art von Feld zurückgeführt werden, das hier besprochene Programm durchgeführt werden können. Man könnte also daran denken, mit Gleichungen vom Typus (4) zu beginnen und an Stelle der Feldstärken und Potentiale der bisherigen Theorie Ausdrücke der Form

$$(7) \qquad \tilde{A}_l(r_1) = \frac{3}{2}\frac{\hbar c}{e}\pi^2 \iint \sum_{k'k''} \alpha^l_{k'k''} (r'k'|R|k''r'')\, \Delta(r'-r_1)\, \Delta(r''-r_1)\, |r'-r''|^2 \, dV' \, dV''$$

zu setzen. Dieser Weg soll noch ein Stück weit verfolgt werden, obwohl kein Grund besteht, gerade diesen Weg schon für den richtigen zu halten.

Bildet man die Vertauschungsprodukte der gemittelten Potentiale und Feldstärken $\left[\tilde{A}_l(r_1), \tilde{F}_m(r_2)\right]_-$, so erweist sich, wie man erwartet, dieser Ausdruck als nur dann merklich von Null verschieden, wenn $l = m$ ist und der Abstand von r_1 und r_2 nicht wesentlich grösser ist als die Breite der Funktion Δ. Trotzdem geht dieser Vertauschungsausdruck im Grenzfall einer unendlich steilen Funktion Δ im allgemeinen nicht in den nach der Qu.El.Dyn. zu erwartenden Wert $2i\hbar c\,\delta(r_1-r_2)\delta_{lm}$ über, sondern unterscheidet sich von ihm durch einen von der Gestalt von Δ und vom Wert von $\frac{e^2}{\hbar c}$ abhängigen Faktor. Es liegt dies daran, dass - wenn man die Grössen $\overline{A}_{l}$, $\overline{f}_{m}$ als Matrizen auffasst - das Produkt zweier Matrizen die Summation von unendlich vielen Zwischenzuständen bedeutet. Der durch diese unendliche Summe ausgedrückte Grenzprozess ist im allgemeinen mit dem anderen Grenzprozess $\Delta \to \delta$ nicht vertauschbar. Die Bedeutung dieses Umstandes für den Aufbau der Theorie ist mir einstweilen unklar.

Sieht man von Schwierigkeiten dieser Art ab, so kann man zur Aufstellung der Gesamtenergie und damit der Schrödingergleichung übergehen. Dabei ist zunächst die Beziehung der neuen Hamiltonfunktion zu der der bisherigen Theorie zu besprechen. In der bisherigen Theorie gelten als Variable die Anzahlen N_r der Elektronen in ihren Zuständen r, und die Anzahlen $M_{k\lambda}$ der Lichtquanten. Diese letzteren Variabeln fallen jetzt fort, wenn man alle Feldgrössen, die sich auf die Strahlung beziehen, nach (7) durch die Dichtematrix ausdrückt. Dies muss bedeuten, dass im Limes $\Delta \to \delta$ die neue Schrödingerfunktion in einen zu einer bestimmten Lichtquantenanzahl gehörigen Ausschnitt aus der alten Schrödingerfunktion übergeht. Teilt man die Energie in die drei Teile: Kinetische Energie der Materie, Energie des Strahlungsfeldes, Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung, so stellt für einen solchen zu einer festen Lichtquantenzahl gehörigen Ausschnitt der zweite Teil eine für alle Zustände gleiche Konstante dar; er kann folglich aus der Energie fortgelassen werden. Die Formel für die Energie in der neuzugewinnenden Theorie wird daher nur zwei Glieder enthalten, von denen das erste der kinetischen Energie der

0017,089

Materie, das zweite der Wechselwirkung entspricht. Man wird also etwa setzen:

$$\tilde{E} = \int dv \int dv' \int dv'' \Delta(v-v')\Delta(v'-v'')\Big\{\Big[-ic\hbar\,\alpha^{s}_{k''k'}\frac{\partial}{\partial x'_s} - \beta_{k''k'} mc\Big](v'k'|R|v''k'') + \frac{3}{2}\hbar c\pi^2\,\alpha^{\lambda}_{k'''k'}(k'v'|R|vk''')\,\alpha^{\lambda}_{k''k''''}(k''''v|R|v''k'')\,|v''-v|^2\Big\} \qquad (8)$$

Dabei ist diese Gleichung (8) nur als Beispiel gedacht für den allgemeinen Typus von Mittelwerten, der auftreten kann; es ist ~~zwar~~ ganz unwahrscheinlich, dass Gleichung (8) schon die richtige Gleichung darstellt. -

Wichtiger als die spezielle Form der Hamiltonfunktion, deren Aufstellung doch nur vorläufig sein kann, scheint mir die allgemeine Feststellung, dass bei der Lösung einer Schrödingergleichung vom Typus (8) keine Singularitäten auftreten werden, dass also auch die Selbstenergien 2.Ordnung, die ~~Werte~~ trotz der Grenzprozesse in der bisherigen Theorie unendlich werden, hier einen ~~un~~endlichen, allerdings von der Breite von Δ abhängigen Wert erhalten. Denn die Matrixelemente, die bisher die Divergenz dieser Selbstenergien verursachten, werden im allgemeinen hinreichend rasch verschwinden, wenn die den Uebergängen zugeordneten Wellenlängen klein~~er~~ gegen die Breite von Δ werden. Dies hat zur Folge, dass man sich bei der Behandlung eines solchen Problems auf mathematisch festem

Boden bewegen kann, ohne etwa bei der Berechnung eines Störungsgliedes der vierten Ordnung fürchten zu müssen, dass die Divergenz des Verfahrens in der zweiten Ordnung dieses Glied illusorisch mache. Es muss also z.B. möglich sein, die exakte Lösung einer Schrödingergleichung vom Typus (8) zu suchen, die etwa der Existenz eines Elektrons entspricht.

Unter "Schrödingergleichung" ist hier diejenige Wellengleichung verstanden, die gestattet, die Eigenwerte der Grösse $\tilde{E}$ zu bestimmen. Auf den zeitlichen Ablauf des Geschehens kann aus der Lösung dieser Gleichung nicht ohne weiteres geschlossen werden; vielmehr kann $\tilde{E}$ der Gesamtenergie und damit dem Operator $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ nur in der Näherung gleichgesetzt werden, in der die von den durchdringenden Lichtquanten und Elektronen herrührenden Schwankungen vernachlässigt werden. Bei der genaueren Untersuchung dieses Punktes wäre es wohl vernünftig, von vornherein nicht nur räumliche, sondern auch zeitliche Mittelwerte der Feldgrössen wie bei B o h r und R o s e n f e l d zu betrachten, doch soll dieser Punkt jetzt nicht weiter verfolgt werden.

In einer einheitlichen Theorie vom Typus (8) würde weder die Existenz eines einzelnen Elektrons, noch die eines einzelnen Lichtquants eine ~~zwar~~ triviale Lösung der Grundgleichungen darstellen. Dies ist aber vielleicht auch nicht zu erwarten. Denn wenn es schon zwei verschiedene Partikelsorten gibt, dann können nicht beide ganz triviale Lösungen der einheitlichen Grundgleichungen sein und es ist dann nicht unbefriedigend, wenn beide Partikelsorten in etwas komplizierterer Weise aus den Grundgleichungen folgen. Ausserdem wird schon ein einzelnes Teilchen zusammen mit dem zu seiner Beobachtung dienenden Apparat relativ komplizierte Wirkungen hervorrufen, die auch im mathematischen Formalismus dargestellt werden müssen.