Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 10.04.1934
Stichworte: Entwurf der “Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons”, Z.Phys. 90 (1934) 209
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-071r
Meyenn-Nummer: 367

Leipzig 10.4.34

Lieber Pauli und lieber Weisskopf!

Dieser Brief soll die Fortsetzung meines letzten Briefs nach Kopenhagen sein. Ich glaube jetzt die Löchertheorie in allen wesentlichen Punkten in Ordnung zu haben und will Euch darüber berichten. Wie ich schon schrieb, ist die abzuziehende Dichtematrix durch

$$(1)\quad \beta = \frac{1}{2}\left[R_F + u\left(\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2-x^2)^2} + \frac{p_0 + \frac{e}{8ic}\left(2\alpha_s\alpha_k x_s F_{0k} - t\alpha_k\alpha_l F_{kl} - \alpha_s\alpha_k\alpha_l x_s F_{kl}\right)}{t^2-x^2}\right) + v\log(t^2-x^2)\right]$$

$$k \neq s \qquad s \neq k \neq l$$

gegeben, wobei natürlich additive reguläre Glieder willkürlich sind. Beim genaueren Studieren der Formel fand ich auch, dass alle Bedingungen (Energie-Impulssatz etc) ebenso erfüllt wären, wenn man statt $F_{0k}(\xi)$ z.B. $\frac{1}{2}\left(F_{0k}(\xi-\frac{x}{2}) + F_{0k}(\xi+\frac{x}{2})\right)$ etc. einsetzt, was eine unerfreuliche Unbestimmtheit des ganzen Formalismus bewirken würde. Nun stellt sich aber heraus, und das ist wohl der wichtigste Punkt an dieser ganzen Rechnerei, dass das Zusatzglied zu p_0 bei irgendeinem dieser Ansätze in den Ausdrücken für Strom, Dichte, Energiedichte etc. stets herausfällt; es liegt dies an den Multiplikationsregeln der α_i. Daraus folgt, dass man für physikalische Fragestellungen überhaupt mit

$$(2)\quad \frac{1}{2}\left[R_F + u\left(\frac{t+\alpha_s x_s}{(t^2-x^2)^2} + \frac{p_0}{t^2-x^2}\right) + v\log(t^2-x^2)\right]$$

durchkommt.

Dieses ganze Schema lässt sich nun ohne weiteres in die Quantentheorie der Wellen umschreiben; man kann sich leicht überzeugen, dass die Nichtvertauschbarkeit der F_{ik} keine Schwierigkeiten hervorruft, ~~dass die Glieder, wo sie vorkommen würden, wegfallen~~ wie aus den folgenden Rechnungen zu sehen ist.

Ich möchte zunächst bei fest vorgegebenen äusseren Feldern ein Rechenschema für die Quantelung der Materiewellen aufstellen. Die Grösse $\psi^*_{\sigma}(P'_{,\varsigma'})\,\psi_{\sigma}(P''_{,\varsigma''})$ will ich dann darstellen in der Form

$$(3) \qquad \psi^*(P'_{,\varsigma'})\,\psi(P''\varsigma'') = \sum a_n^* a_m\, u_n^*(P'\varsigma')\, u_m(P''\varsigma'')\, e^{\frac{ie}{\hbar}\int_{P''}^{P'}(A_s dt - A_s dx_s)},$$

wobei ~~$u_{n\sigma}$~~ die u_n die Diracfunktionen im Potentialfreien Raum bedeuten. Die Dichtematrix wird dann im Ganzen

$$(4) \qquad R_{\substack{P'\varsigma' \\ P''\varsigma''}} = \sum a_n^* a_m\, u_n^*(P'\varsigma')\, u_m(P''\varsigma'')\, e^{\frac{ie}{\hbar}\int\cdots} \quad - \quad (P'\varsigma'\,|\,B\,|\,P''\varsigma'')$$

Nun nehme ich den üblichen Prozess von Oppenheimer u.s.w. vor, d.h. ich ersetze links $a_n^* a_m$ durch $-a_m a_n^*$ dann, wenn n und m beide zu Zuständen negativer Energie gehören. Die so abgeänderte ~~Dichtematrix~~ Summe heisse Σ'. Dann wird offenbar (im Folgenden wird noch $t=0$ gesetzt, d.h. P' und P'' beziehen sich auf die gleiche Zeit):

$$(4) \qquad \left(\begin{smallmatrix}P'\\ \varsigma'\end{smallmatrix}\middle|R\middle|\begin{smallmatrix}P''\\ \varsigma''\end{smallmatrix}\right) = \sum{}' a_n^* a_m\, u_n^*(P'\varsigma')\, u_m(P''\varsigma'')\, e^{\frac{ie}{\hbar}\int\cdots} + \tfrac{1}{2}\left(w\, e^{\frac{ie}{\hbar}\int\cdots} - w\right)\log(\;\; - r^2) + \text{Glied. m. } F.$$

Die weggelassenen Glieder mit F_{ks} sind, wie oben gesagt, später unwichtig; ebenso kann der Faktor $e^{\frac{ie}{\hbar}\int}$, wenn man R zur Berechnung von Strom od. Ladungs~~dichte~~ dichte verwenden will, weggelassen werden, da er ~~nur~~ mit Gliedern multipliziert ist, die nur logarithmisch divergieren für $r \to 0$. Bildet man z.B. die Ladungsdichte, so braucht man die

Diagonalsumme von $(P'\varrho'|x|P'\varrho')$, und die ~~[illegible]~~ wird, wenn ich in ω_0 und ω die Glieder 0. Ordnung ~~[illegible]~~ (bei Entwicklung nach x) ... allein stehen lasse:

(5) $$\lim_{x,\hbar\to 0}\sum_{\varrho'}(P'\varrho'|x|P'\varrho') = \sum_{\varrho'}\left(\xi+\frac{x}{2}\Big|x\Big|\xi-\frac{x}{2}\right) = \left[\sum{}' a_n^* a_m \sum_{\varrho'} u_n^*\left(\xi+\frac{x}{2},\varrho'\right) u_m\left(\xi-\frac{x}{2},\varrho'\right) + \frac{e}{12\hbar\pi^2}\frac{\partial F_{0s}}{\partial \xi_s}\log(-x^2)\right]_{\lim x\to 0}$$

Das Logarithmusglied, das hier rechts auftritt, ist ~~[illegible]~~ früher als unendliche Polarisation des Vakuums aufgetreten, die jetzt aber wegfällt, da sie wieder abgezogen wird. Da die Maxwellsche Gleichung

(6) $$\frac{\partial F_{0s}}{\partial \xi_s} = -4\pi e\sum_{\varrho'}(P'\varrho'|x|P'\varrho')$$ gilt

(das Vorzeichen ist hier vielleicht falsch, es ist bei [illegible] Fall, mit der [illegible] zu überlegen) folgt aus (5) und (6)

(7) $$\text{Lad. Dichte} = e\sum_{\varrho'}(P'\varrho'|x|P'\varrho') = e\cdot\lim_{x,\hbar\to 0}\left(\frac{\sum' a_n^* a_m \sum_{\varrho'} u_n^*\left(\xi+\frac{x}{2},\varrho'\right)u_m\left(\xi-\frac{x}{2},\varrho'\right)}{(1)+\frac{e^2}{3\hbar\pi}\log(-x^2)}\right)$$

Wie man sieht, bleibt von einer Polarisation des Vakuums nichts mehr übrig!

Führt man eine ähnliche Berechnung der Gesamtenergie, also der Hamiltonfunktion durch, so zeigt sich wie oben, dass zu den Gliedern, die wir bisher berücksichtigt haben und die in der Form

$$\sum{}' a_n^* a_n E_n + \sum a_n^* a_m \int u_n^* \alpha_s u_m e A_s\, d\tau$$

geschrieben werden können, nur Terme hinzutreten, die ~~xx~~ mit ω etwas zu tun haben. ~~Tatsächlich~~ Setzt man insbesondere wieder $\hbar = 0$, so wird die Limes-Bildung ~~[illegible]~~ sehr einfach und es folgt

~~$\sum a_n^* a_n E_n + \sum a_n^* a_m \int u_n^* \alpha_s u_m e A_s\, d\tau$~~

$$H = \int dV_\xi \Big\{ \Big[\alpha_s \Big[i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - \frac{e}{c}(A_s^+ + A_s^-) \Big] + \alpha_4 m \Big] \sum{}' a_n^* a_m \, u_n^*(\xi + \tfrac{x}{2})\, u_m(\xi - \tfrac{x}{2})\, e^{\frac{ie}{\hbar c}S \dots} \cancel{- \tfrac{1}{2}\log(-x^2)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\big(w e^{-\frac{ie}{\hbar c}S} - w_0\big)}$$

$$\lim x \to 0 \qquad - \frac{1}{2}\log(-x^2)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Big(w e^{-\frac{ie}{\hbar c}S} - w_0\Big) \Big\} + \frac{1}{8\pi}\big(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\big) \Big\}$$

Die erste Zeile ist ja im wesentlichen der frühere übliche Ausdruck. Das Glied $\frac{\partial}{\partial t}\big(w e^{-\frac{ie}{\hbar c}S} - w_0\big)$ lässt sich mit einiger Mühe ausrechnen und gibt $+\frac{e^2 i}{12\hbar^2\pi^2}\big(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\big)$! Im ganzen wird also:

$$(8) \quad H = \int dV_\xi \Big\{ \Big(\alpha_s \Big[i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - \frac{e}{c}(A_s^+ + A_s^-)\Big] + \alpha_4 m \Big) \sum{}' a_n^* a_m \, u_n^*(\xi + \tfrac{x}{2})\, u_m(\xi - \tfrac{x}{2})\, e^{\frac{ie}{\hbar c}S}$$

$$\lim x \to 0 \qquad + \Big(\frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2}\log(-x^2)\frac{e^2}{12\hbar\pi^2}\Big)\big(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\big) \Big\}$$

Die ganze Theorie wird also mathematisch nicht komplizierter, als bisher, aber es kommen am Schluss die beiden merkwürdigen Grenzübergänge mit $\log(-x^2)$ vor. Die Tatsache, dass in beiden Formeln (7) und (8) dieser Faktor $1 + \frac{e^2}{3\hbar\pi}\log(-x^2)$ vorkommt, dass überhaupt allgemein, wie ich nachgerechnet habe, bei Stromdichte, Energiedichte, Impulsdichte etc. stets das Materiefeld den Beitrag des Maxwellschen Feldes mit dem Faktor $\frac{e^2}{3\hbar\pi}\log(-x^2)$ wiederholt, ist doch sicher ein erstes Zeichen von „tieferliegenden" Zusammenhängen von Materie- und Strahlungsfeld.

Am Endresultat (8) sieht man wohl auch sofort, dass die Quantelung des Maxwellfeldes nichts am Formalismus ändert; nur wird man bei $\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2$ wieder die Nullpunktsenergie abziehen müssen.

Viele Grüsse!

Ihr W. Heisenberg.