Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 07.05.1928
Stichworte: Fortsetzung der Theorie des Ferromagnetismus
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-051ar
Meyenn-Nummer: 193

1928

Institut für theoretische Physik
der Universität

LEIPZIG C1, den 7. V.
Linnéstr. 5

Lieber Pauli!

Heute will ich meine Epistel über den Ferromagnetismus fortsetzen und zunächst die Haupteinwände schreiben, die Du natürlich auch längst gesehen hast. Den Summationsschwindel am Schluss bei der statistischen Auswertung möchte ich zunächst als von höherer Ordnung vernachlässigen. ~~Also~~ Der Hauptschwindel liegt ~~also~~ vielmehr darin, dass ich für alle Terme von gleichem Gesamtimpuls j den Energie-schwerpunkt, statt den richtigen Termwert eingesetzt hab. Wenn die Terme stark um den Schwerpunkt streuen, so kann sich das Resultat total ändern. Man kann auch leicht ein Gegenbeispiel gegen die bisherige Rechnung beibringen: Etwa ein Gas, in dem je 2 Atome (also etwa 1↔2, 3↔4, 5↔6, ...) resonanzgekoppelt sind so, dass Parallelstellung der Spins ~~am~~ stabilsten ist, wobei aber verschiedene Paare gar keine Wechselwirkung haben. In diesem Fall gibts garantiert keinen Ferromagnetismus, trotzdem liegen die Energieschwerpunkte so, wie ich neulich schrieb, auch in diesem Fall. Es wird also nötig sein, die Verteilung der Energien um den Schwerpunkt genauer zu kennen. Da ein Ausrechnen aller n-Wurzeln aussichtslos ist, hab ich folgendes angesetzt: ~~Die Wurzeln~~ Ich berechne zunächst das mittlere Schwankungsquadrat der Energie um den Schwerpunkt. Das lässt sich gruppentheor. machen und führt zur Formel

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{\sum_p \sum_{p'} \left(\chi^E \chi^{p,p'} - \chi^p \cdot \chi^{p'}\right) J_p J_{p'}}{\left(\chi^E\right)^2}.$$

Dann nehme ich an, dass die Verteilung ~~im~~ im wesentlichen eine Gauss'sche Fehlerkurve sei, die eben das angegebene Schwankungsquadrat liefert. Dann kann man wieder alles rechnen. Die Anzahl der Terme zwischen ΔE und $\Delta E + d\Delta E$ wird dann $\chi_E \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\Delta E^2 \cdot a}\, d\Delta E$, wo $a = \frac{2}{\overline{\Delta E^2}}$. (das Integral über ΔE von $-\infty$ bis $+\infty$ muss natürlich $f\sigma = \chi_E$ ergeben).

In der Zustandssumme steht also jetzt, an Stelle von $e^{-\frac{E_0}{kT}} \cdot \chi(E)$ die Grösse $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{E_0}{kT} - \frac{\Delta E}{kT} - \Delta E^2 \cdot a} \cdot \chi_E \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, d\Delta E$

$$= e^{-\frac{E_0}{kT} + \frac{\overline{\Delta E^2}}{2k^2T^2}}.$$

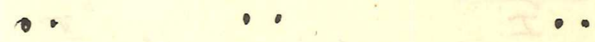
Der Witz ist nun, dass $\overline{\Delta E^2}$ nicht mehr für alle Arten von zwischen n Teilchen Wechselwirkung die gleiche Funktion von j und n ist, sondern dass $\overline{\Delta E^2}$ wesentlich von der Anordnung abhängt. Allgemein ist die Grössenordnung von $\overline{\Delta E^2} \sim \frac{E_0^2}{n}$, nicht, wie man etwa meinen könnte E_0^2. Dann hab ich die weiteren Rechnung

Institut für theoretische Physik
der Universität

LEIPZIG C 1, den
Linnéstr. 5

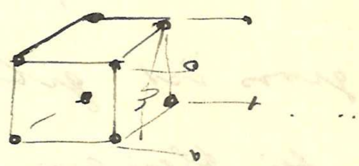
durchgeführt für 3 verschiedene Anordnungen. (Gesamtzahl der Teilchen $= 2n$)

1.) Je zwei Atome gehören zu einem Paar zusammen (das „Gegenbeispiel" von oben.)



2.) Die lineare Kette.

3.) Räumliches (kubisches) Gitter.



Das Resultat ist: Die e-Funktion sieht so aus

$$e^{\alpha \frac{j^2}{2n} + \alpha^2 \frac{(n^2-j^2)(3n^2-j^2)}{8 z n^3}},$$

wobei im Falle 1.) $z = 1$; im Fall 2; $z = 2$ und im Fall 3 $z = 6$ zu setzen ist. Dabei ist $\alpha = \frac{E_0}{2kT}$, (in der kritischen Temperaturgegend ist $\alpha \sim$ Grössenordnung 1); niedrigere Potenzen von n und j sind vernachlässigt. Geht man jetzt wieder zur ~~Bltemann~~ Summation über m und j des Ausdrucks

$$\sum_m \sum_j e^{\beta m + \alpha \frac{j^2}{2n} + \alpha^2 \text{—}} \chi(E)$$

über, so wende man etwa den Schwindel höherer Ordnung von neulich an und entwickelt m in der Gegend $m \sim m_0$. Es folgt schliesslich für die Zustandssumme

$$\sum_{m=-n}^{+n} e^{m(\beta + \alpha \frac{m_0}{n}(1 - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{2z} \frac{m_0^2}{n^2}))} \binom{2n}{n-m}$$

$$= \left(e^{\frac{1}{2}(\beta + \alpha \frac{m_0}{n}(\;))} + e^{-\frac{1}{2}(\beta + \alpha \frac{m_0}{n}(\;))} \right)^{2n}$$

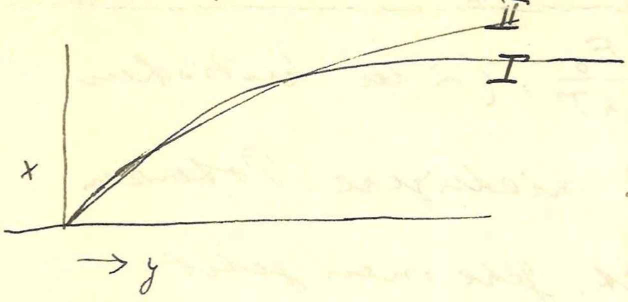
Schliesslich

$$m_0 = n\, \mathfrak{T}g\, \frac{1}{2}\left(\beta + \alpha \frac{m_0}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{z^2}\frac{m_0^2}{n^2}\right)\right) \; ; \cancel{B}$$

~~Bezeichnet~~ Setzt man $\frac{m_0}{n} = x$; $\frac{1}{2}\left(\beta + \alpha \frac{m_0}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{2z^4}\frac{m_0^2}{n^2}\right)\right) = y$, so heissen die Gleichungen

$$\underbrace{x = \mathfrak{T}g\, y}_{I}; \quad \underbrace{\beta + \alpha x\left(1 - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{2z^4}x^2\right) = 2y}_{II}$$

und die Schnittpunkte dieser Kurven sind aufzusuchen. Man sieht nun sofort, dass alles auf den Wert von z ankommt; wenn z hinreichend gross ist, gibt es bei geeignetem α Ferromagnetismus, bei kleinem z nicht. Die Werte $z = 1$ und $z = 2$ geben keinen Ferromagnetismus, sie sind viel zu klein; $z = 6$ liegt eben an der Grenze und liefert Schnittpunkte. Leider ist aber ~~die~~ Winkel der Tangente von II im Nullpunkt (für $\beta = 0$) immer noch ~~zu~~ grösser als ~~die~~ von I, die Schnittpunkte werden für günstige Werte von α (bei $\alpha \sim 3$ herum) nur durch das kubische Glied gerade noch ermöglicht.



Erst von $z > 8$ ab bekommt man das übliche Bild der Weissschen Kurven, mit dem Unterschied, dass an Stelle der Geraden bei Weiss hier eine kubische Parabel tritt. Dass es bei $z = 6$ ~~gerade~~ mehrere Schnittpunkte nach Art des Bildes gibt, bedeutet wohl physikalisch nichts. Aber nur dies, dass ~~[illegible]~~ in Wirklichkeit noch mehr Partikel als je eines mit 6 anderen in ~~Z~~ Resonanzwechselwirkung stehen.

Alles in allem aber find ich, man versteht doch schon wesentlich besser, worauf es beim F.M. eigentlich ankommt.

Nun viele Grüsse

Dein W. Heisenberg.