Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 07.01.1926
Stichworte: Versuch, die Mittelwerte mit Polarkoordinaten zu rechnen
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-031r
Meyenn-Nummer: 115

Göttingen 7.1. 1926

Lieber Pauli!

Vielen Dank für Ihren letzten Brief; die Bahnfahrt von München hierher hab ich ausgenützt, um etwas über die berühmten Mittelwerte nachzudenken; zu irgend welchen bündigen Ergebnissen bin ich nicht gekommen, aber vielleicht können Sie etwas mit dem Folgenden anfangen: Wir denken an den 2-dimensionalen Wasserstoff u. versuchen, Polarkoordinaten einzuführen. Dann wird

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\varphi^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right)\right) - \frac{e^2}{r}.$$

Dass $p_r \cdot r - r\, p_r = \varepsilon$ $\left(\varepsilon = \frac{h}{2\pi i}\right)$ ist, haben Sie schon gezeigt (wenn $p_x x - x p_x = \varepsilon$ u.s.w. gilt).

Ebenso kann man jetzt ~~formal~~ die Grösse $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ einführen. (Dass diese Grösse nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist, tut nach der neueren Arbeit von Born u. Wiener nichts.) Es gilt dann $p_\varphi \varphi - \varphi p_\varphi = \varepsilon$ u. φ ist mit r und p_r vertauschbar.

Beweis etwa folgendermassen: $(p_\varphi = x p_y - y p_x)$:

$$p_\varphi \varphi - \varphi p_\varphi = x p_y \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \cdot x p_y - y p_x \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, y p_x$$

$$= \varepsilon\left(x \frac{d}{dy}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y \frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \varepsilon.$$

Ferner kann man leicht zeigen, dass gilt:

$$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}.$$

Nun ~~ist~~ bedeutet klassisch bekanntlich der Mittelwert von $\dot{\varphi}$ einfach die Frequenz und ist daher von <u>k unabhängig</u> bei einer Keplerbahn. Ich möchte daher glauben, was ich leider nicht beweisen kann, dass auch in der Quantenmechanik ~~gilt~~ $\overline{\dot{\varphi}}$ von k unabhängig ist. Wenn dies wahr ist, so folgt sofort, dass $\overline{\frac{p_\varphi}{m r^2}}$ von k unabhängig ist; also verhielte sich $\overline{\frac{1}{r^2}} \sim \frac{const}{p_\varphi}$ hinsichtlich der Abhängigkeit von k; dieses p_φ ist aber $\frac{1}{2}$ beim s-Term, $\frac{3}{2}$ b. p-Term u.s.w. Daraus würde nach Ihren weiter folgen, dass $\overline{\frac{1}{r^3}} \sim \frac{const}{p_\varphi \cdot \left(p_\varphi^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right)}$, also für den s-Term ∞. Dann würde offenbar das Goudsmitsche Modell kaum durchführbar sein. Aber es hängt eben alles daran, ob $\overline{\dot{\varphi}}$ wirklich von k unabhängig ist. Man könnte auch an folgendes denken: In der klassischen Theorie ist zwar $\overline{\dot{\varphi}}$ im allgemeinen von k unabhängig, für die Pendelbahn dagegen ist es Null. So <u>könnte</u> (??) $\overline{\dot{\varphi}}$ auch quantenmechanisch für die s-Bahn verschwinden, für die anderen Bahnen aber den oben genannten Wert haben.

Aber ich sehe keinen Weg, bis jetzt, diese offenen Fragen zu entscheiden, mir scheint nur das Goudsmitsche Modell auch recht schwierig durchführbar; dass es ganz falsch ist, möcht ich aber auch nicht glauben.

Mein Preiskegelschieben in Stade findet erst eine Woche später statt, ich werd also wohl 20. bei Ihnen vorsprechen. Bis dahin auf Wiedersehn, grüssen Sie Stern, Lenz, Minkowski u. Wentzel! Und weiter viel Glück!

W. Heisenberg.

$q p_n - p_n q = 0$

$\dot{q}$